INSTITUTIONES ARITHMETICÆ

CUM APPENDICE

DE NATURA, ATQUE USU LOGARITHMORUM

AUCTORE

PAULINO A S. JOSEPHO LUCENSI

Cler. Reg. Scholarum Piarum & in Archigymn. Romano Eloquentiæ Professore.

ROMÆ MDCCXLIII.

TYPIS JOANNIS ZEMPEL PROPE MONTEM JORDANUM
PRÆSIDUM FACULTATE.

DEO OPT. MAX.

Scientiarum Parenti
ac Domino,
Qui Unus & Trinus
Omnia disposuit
In mensura & numero
& pondere,
Opellæ hujus auctor
Hanc, se, suaque omnia

D. D. D.

AD LECTOREM.

PAuci ſunt, qui de ARITHMETICA recte judicent. Ea pleriſque vileſcit, quod negotiatorum, aut eorum, qui accepti expenſique tabulas conficiunt, artem eſſe putent. At longe aliter de illa viri ſapientes judicarunt. Plato quidem in Epinomide affirmat, ſine Arithmetica neque ullam ſcientiam, neque ipſam hominum ſocietatem poſſe conſiſtere. Ariſtotiles autem exiſtimabat, tam proprium eſſe hominis numerare, quam ratiocinari. Quid vero D. Auguſtinus, qui frequentiſſime ſuis in libris, præſertim vero de Doctrina Christiana, præclare de Arithmetica loquitur, multisque exemplis ostendit, ob numerorum inscitiam, plurima in sacris literis ignorari? In eadem prorsus sententia fuerunt D. Hieronymus, ut ex lib. 2. contra Jovinianum, aliisque ex locis palam est; tum D. Gregorius Nazianzenus, qui D. Basilium præceptorem suum summis laudibus celebrat, quod is numerorum scientia ad sacræ Scripturæ intelligentiam, aliasque disciplinas sibi viam munivisset. Illud certe negari non potest, ab iis, qui Arithmeticæ studia contemnunt, Geometriæ quoque, ac veræ Physicæ studia, hoc est disciplinarum omnium succum, & sanguinem, contemni omnino oportere: cum fieri non possit, ut hæc, quæ mirabili quodam ordine ac numerorum proportione inter se cohærent, sine scientia numerorum intelligi valeant. Quis enim sine calculis comprehendat motus quantitatem ac leges, quadrata temporum, triplicatas corporum similium rationes, resistendi vires, sonorum velocitates, liquidorum æquilibria, ac sexcenta alia, quibus non intellectis, naturalem omnem scientiam eum latere necesse est? Itaque non immerito Plato in lib. 7. de Repub. Arithmeticam

vocat

vocat vestibulum scientiarum, quod scilicet numerorum tractatione speculationibus difficilioribus animus assuescit, & ad reliquos scientiæ fatus excipiendos mirum in modum præparatur. Imo ex ipsa numerandi vi faustum ad ceteras disciplinas progressum auguratur. *Homines*, inquit, *natura Arithmetici ad omnes doctrinas acuti videntur*. Hinc est, quod multi in omni memoria viri doctissimi in ordinandis, illustrandisque Arithmeticæ elementis desudarunt, quod eorum utilitatem, summamque necessitatem probe nossent. Ex præclaris eorum inventis ego triginta & amplius ab hinc annis ea decerpsi in usum studiosæ Juventutis Collegii Nazareni, quæ magis ad Juvenum ingenium apta, & ad Matheseos studia necessaria esse judicavi. Semper enim illis viginti & uno annis, quibus nobiles ejusdem Collegii adolescentes in Mathematicis disciplinis institui, Arithmeticæ studium præmisi, cujus ope tum II., tum V. & VI. Elementorum Euclidis propositiones facile ab illis percipi experientia comperi, contra vero Arithmetica destitutos in ipsis diu, multoque labore versari. Cum autem decursu temporis in ea scripta per manus tradita multa menda, ut fieri solet, irrepsissent, mul-

toque

toque labore ac tempore in illis transcribendis opus esset, res non inutilis visa est, illa typis emittere; eaque occasione adjecta est de natura atque usu Logarithmorum Appendix, quam pariter in gratiam eorum adolescentium jampridem adornaveram; tum etiam nonnulla alia, quæ ad quæstiones aliquot Arithmeticæ practicæ pertinent, quæ sane in vita civili haud semel occurrunt. Ad praxes autem Arithmeticas, quæ præcepti brevitate, & exemplorum copia satis claræ esse videntur, accedunt quoque demonstrationes, quales in hujus scientiæ tyrones conveniunt, quibus nimirum Euclides adhuc ignotus: cujus nihilominus unam, vel alteram propositionem citare, aut supponere, opportunum visum est. Profecto meras praxes afferre, rem valde tritam, & vulgarem putavi: demonstrationes autem adhibere ex Euclidis elementis VII., VIII., & IX., vel etiam ab Analyseos speciosæ penu depromptas, quod alii fecerunt, juventuti nostræ rem immaturam. An vero in medio constiterim, sapientum esto judicium.

JOSEPH AB ANGELO CUSTODE

Cler. Reg. Pauperum Matris Dei Scholar. Piar.

PRÆPOSITUS GENERALIS.

Cum librum, cui titulus INSTITUTIONES ARITHMETICÆ CUM APPENDICE DE NATURA, ATQUE USU LOGARITHMORUM, a P. Paulino a S. Joseph Assistente nostro Generali duo ex nostris, quibus commissum fuit, recognoverint, atque approbaverint; ut typis mandetur, si iis, ad quos spectat ita videbitur, facultatem in Domino concedimus. Romæ in Ædibus nostris Scholarum Piarum apud S. Pantaleonem, die 29. Aprilis an. 1743.

Joseph ab Angelo Custode
Præp. Generalis.

Laurentius a S. Hyacintho Secret.

IMPRIMATUR.

Si videbitur Reverendissimo Patri Magistro Sacri Palatii Apostolici.

F. M. de Rubeis Archiep. Tars. Vicesg.

APPROBATIO.

Librum, cui titulus INSTITUTIONES ARITHMETICÆ CUM APPENDICE DE NATURA, ATQUE USU LOGARITHMORUM ab Adm. R. P. Paulino a S. Josepho Cler. Reg. Scholarum Piarum Assistente Generali concinnatum, de mandato Rmi P. Sacri Palatii Apostolici Magistri, diligenter legi. In eo nihil inveni bonis moribus, sive Catholicæ Religioni repugnans, verum in instituendis Tyronibus in valde necessaria numerorum facultate brevem, dilucidam, & concinnam methodum observavi. Ideo dignissimum utilissimumque puto, ut typis ad cujuscunque commodum consignetur. Romæ v. Kal. Januarii MDCCXLIII.

Franciscus Xaverius Brunetti.

APPROBATIO

Jubente Rmo Sac. Palatii Magistro, legi diligenter librum, cui titulus INSTITUTIONES ARITHMETICÆ CUM APPENDICE DE NATURA, ATQUE USU LOGARITHMORUM: in eoque non solum nihil reperi sanæ Fidei bonisve moribus adversum, sed universam Arithmeticam breviter, & perspicue expositam. Quare Institutiones illas publici juris dignissimas censeo. In quorum fidem &c. Datum Romæ in Conventu SS. Trinitatis die 9. Maij an. 1743.

Fr. Franciscus Jacquier ex Minim. Familia Soc. Institut. Bononien., & bonarum artium Academ. Lugdunen.

IMPRIMATUR

Fr. Aloysius Nicolaus Ridolfi Sac. Pal. Apost. Mag. Ord. Prædicatorum.

INDEX
CAPITUM, ET PROPOSITIONUM.

CAPUT I.
De Calculo Integrorum.

CAPUT II.
De Calculo Denominatorum.

CAPUT III.
De Calculo Fractorum.

CAPUT IV.
De Extractione Radicum.

CAPUT V.

De Regulis Arithmeticis.

CAPUT VI.

De Progressionibus Arithmeticis, & Geometricis, earumque regulis.

Prop.

De Progressionibus Geometricis.

APPENDIX

De Logarithmis, eorumque natura atque usu.

Prop.

INSTITUTIONES ARITHMETICÆ.

DEFINITIONES.

I. ARITHMETICA est scientia numerorum, cujus partes sunt quatuor: *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Divisio*.

II. *Unitas* est denominatio, per quam aliqua res dicitur una.

III. *Numerus* est unitatum multitudo, proinde unitas non est numerus, sed numeri principium, sicuti punctum est principium lineæ.

IV. *Numeri simplices* sunt unitates infra decadem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. His additur cyphra 0, quæ per se nihil significat, sed numeris addita valorem auget decuplum, ut 10, 20, 30 &c.

V. *Numeri compositi* sunt numeri majores denario, incluso ipso denario, scilicet 10, 11, 12, 13, 14 &c.

VI. *Numerus numeri multiplex* dicitur, cum minor metitur majorem, hoc eſt cum minor aliquoties ſumptus majori æqualis fit; ſeu cum major minorem aliquoties præciſe continet. Sic 12 dicitur multiplex numeri 2, quia 2 ſexies ſumptus æqualis fit ipſi 12; ſeu quia 12 ſexies præciſe continet 2.

VII. *Pars aliquota* numeri eſt, quæ numerum metitur, pars *aliquanta*, quæ non metitur. Sic 2, 3, 4, dicuntur pars aliquota numeri 12; at vero 5 pars aliquanta ipſius, quia aliquoties ſumpta vel ipſum excedit, vel ab eo deficit.

VIII. *Numeri inter ſe primi ſunt*, quos nulla communis menſura, præter unitatem, metitur; ut 5 & 9, 7 & 12, 10 & 13, & alii infiniti.

IX. *Proportio numerorum* eſt habitudo, ſeu ratio quædam unius numeri ad alterum, ſecundum quod unus alterius eſt multiplex, vel pars, ſeu partes; ſic 4 ad 2 dicitur habere rationem dupli; 9 ad 3 rationem tripli. Contra vero 2 ad 4 rationem partis, ſeu ſemiſſis, 3 ad 9 rationem tertiæ partis &c.

X. *Numeri homogenei* ſunt illi, quorum unitates eandem rem ſignificant.

XI. *Numeri heterogenei*, ſeu *denominati* ſunt, qui variis nominibus denominantur, hoc eſt res diverſas ſignificant; ut dies, horas, minuta.

XII. *Numeri* alii ſunt *integri*, alii *fracti*, qui nempe continent aliquot partes alterius numeri, ſeu unitatis, de quibus in Cap. III.

CA-

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

PROPOSITIO I.

Dati numeri valorem exprimere.

I. SIT exprimendus numerus datus *A*. Dividatur in periodos, ſecernendo virgula ternas quaſcunque figuras, incipiendo a dextera; diviſus erit numerus *A* in tres periodos, ſeu centurias. Harum quælibet continet unitates, decades, & centenas: ſed prima dextrorſum continet unitates, decades, & centenas ſimpliciter; ſecunda vero continet unitates, decades, & centenas millium: tertia demum unitates, decades, & centenas millionum.

A 394, 875, 462.

Exprimitur incipiendo ſiniſtrorſum, & progrediendo verſus dexteram ſic: tercenti nonaginta quatuor milliones, octingenta ſeptuaginta quinque millia, quadringenta ſexaginta duo. Similiter numerus *B* diviſus, ut ſuperius dictum eſt, dicit centum viginti quatuor milliones, & duo millia.

B 124, 002, 000.

 De-

Demum numerus *C* exprimit milliones 100.

$$C\ 100,000,000.$$

II. Pro numeris prolixioribus exprimendis ita procedes. 1. Datus numerus eodem modo per virgulas distribuatur in membra, ut superius factum est. 2. Super notam primam dextrorsum ponatur una cyphra 0, intermissisque quinque figuris, supra notam septimo loco positam ponatur unitas 1. Item post quinque iterum notas scribatur 2, atque ita deinceps, relictis semper quinque notis, scribatur 3, 4, 5 &c. Quodlibet membrum continet sex notas, (præter primum ad sinistram, quod aliquando continere potest 2, 3, 4, aut 5 notas) Exprimendæ sunt igitur simul sex illæ notæ; prolataque integra periodo, toties repetenda est vox hæc *millio*, quot sunt unitates, quæ continentur supra primam notam talis periodi. Virgulæ autem appositæ millia significant, ut exemplis sequentibus *D*, & *E* facile intelligitur.

$$D\ 5\overset{2}{2},329,18\overset{1}{9},602,80\overset{0}{0}$$

Quinquaginta duo milliones millionum, tercentum viginti novem millia millionum, centum octoginta novem milliones, sexcenta duo millia, octingenta.

$$E\ 45,92\overset{3}{8},634,42\overset{2}{6},350,87\overset{1}{2},385,17\overset{0}{3}$$

Quadraginta quinque millia millionum millionum millionum, nongenti viginti octo milliones millionum millionum, sexcenta triginta quatuor millia millionum millionum; quadringenti viginti sex milliones millionum, tercenti quinquaginta millia millionum, octingenti septuaginta duo milliones, trecenta octoginta quinque ac centum septuaginta tres.

SCHOL. I. *Si cui molestum sit iterare toties vocem illam* millionum, *utatur hoc compendio: Ubi pronuncianda est vox millionum bis, dicat* bimillionum: *ubi ter, dicat* trimillionum: *ubi quater*, quadrimillionum *&c. adeoque superius exemplum efferri potest sic: quadraginta quinque millia trimillionum, nongenti viginti unum milliones bimillionum &c.*

SCHOL. II. *Præter valorem simplicem, quem singulæ notæ Arithmeticæ habent proprium, alium insuper habent ratione loci, quem occupant: qui valor procedit in proportione subdecupla. Itaque nota primo loco, a dextris incipiendo, posita significat unitates, secundo loco posita significat tot decades, quot unitates habet; tertio loco tot centenas, quarto loco millia, quinto loco dena millia, sexto loco centena millia &c. Id tyrones bene intelligant necesse est. Ecce exemplum.*

1 3 4 6 5 9 2.	duo.
9 0.	nonaginta.
5 0 0.	quingenta.
6 0 0 0.	sex millia.
4 0 0 0 0.	quadraginta millia.
3 0 0 0 0 0.	trecenta millia.
1 0 0 0 0 0 0.	decies centena millia, seu millio.
1 3 4 6 5 9 2.	

PRO-

PROPOSITIO II.

De Additione Integrorum.

I. ADditio est plurimorum numerorum in unam summam collectio. Numeri addendi vocantur *dati*; numerus, qui ex additione conflatur, dicitur *summa*, seu *aggregatum*. Additio procedit a dextra in sinistram. En praxis pro homogeneis.

1. Scribantur numeri ordinatim ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis invicem sibi respondeant.

2. Ducta linea, numeros sub eadem columna positos in unum collige; & si novem non excedant, subscribe quotquot sunt.

3. Si numerus collectus excedit novem, ita ut unam, vel plures decades contineat, subscribe id, quod remanet supra decades, & adde sequentis columnæ numeris tot unitates, quot fuerunt decades.

Sit exemplum, quæritur quot anni elapsi sint ab orbe condito usque ad annum 1742. completum. Ex Petavii computo tom. 2. lib. 13. de Doctrina Temporum, numerantur,

	D	C	B	A
Ab Adamo ad finem diluvii anni,	1	6	5	6.
A fine diluvii ad Christum,	2	3	2	7.
A Christo ad annum 1742.	1	7	4	2.
Summa	5	7	2	5.

Nam

Nam primo unitates 2, 7, 6 in columna *A* faciunt 15, quæ continent decadem 1, & remanent 5. Scribo itaque 5 infra lineam, & reservo 1 pro sequenti columna *B*, nempe unam decadem.

Similiter decades 4, 2, 5 in columna *B* faciunt 11. addita priori unitate, sunt 12. Scribo 2 infra lineam, & retineo unitatem, quæ centenarium dicit, addendam numeris columnæ *C*.

Centena 7, 3, 6 columnæ *C* cum præcedenti unitate faciunt 17. Scribo igitur 7, & retineo unitatem, quæ mille importat, pro sequenti columna *D*.

Demum millia 1, 2, 1 columnæ *D* cum præcedenti 1 faciunt 5, quæ scribo infra lineam, & habetur summa quæsita 5725.

Sit aliud exemplum. Addendæ sunt in unam summam plures accepti, vel expensi summæ *A*, *B*, *C*.

A	*B*	*C*
104	7245	235
741	3280	7348
892	834	9532
1380	1273	780
Sum. 3117	Sum. 12632	Sum. 17895

Peracta operatione, habetur summa *E* 3117; ubi patet, cyphras 0 in additione nihil addere, nam 0, 2, 1, 4, faciunt 7.

II. Præter usitatum additionis explicatæ modum, est alter, in quo operatio procedit a sinistra versus dexteram, & nullus in eo numerus mente retinetur, sed tota summa statim infra lineam describitur. Addendi sint numeri *A*, *B*, *C*.

F G

		F	G	H	I
A		1	9	6	6
B		7	3	4	5
C		9	2	8	9
D	1	7	4	8	0
E		1	1	2	
X	1	8	6	0	0

1. Incipiens a ſiniſtra, quæ hic millia ſignificat, dico 9 cum 7 faciunt 16, & 16 cum 1 faciunt 17, quem totum ſcribo ſub ipſa columna millium *F*.

2. Colligo centena ſecundæ columnæ *G*, quæ faciunt 14: pono 4 immediate ſub linea, ſed 1 ſub præcedenti columna *F*, nempe infra 7. Eodem modo notantur decades 18 ſub columna *H*, & unitates 20 ſub columna *I*.

3. Ducta linea, altera fit additio ordinum *D* & *E*, & habetur ſumma quæſita *X*.

Demonſtr. Additionis ratio manifeſta eſt ex *Axiom.* 9. *lib.* 1. *Eucl.* nempe totum æquale eſſe omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis. Tot enim ſunt unitates, decades, centena, ac millia in ſumma reperta *X*, quot unitates, decades, centena, ac millia exiſtunt in ſummis ſingulis datis *A*, *B*, *C*. Nam ſi colligantur unitates ſub columna prima *I*, efficiunt 20, hoc eſt decades 2, proinde ponitur 0, & reſervantur 2 illæ decades ad propriam ſedem decadum *H*. Similiter decades collectæ ſub columna *H* ſunt 18, quæ additis duabus prio-

prioribus, faciunt 20, hoc eſt centena 2, adeoque ponitur 0, & reſervantur 2 ad ſequentem ſeriem. Sub columna tertia *G* ſunt 14 centena, quibus ſi addantur 2 præcedentia, ſunt 16. Ponitur itaque 6, & reſervatur 1 mille. Demum millia columnæ quartæ *F* ſunt 17, quæ cum præcedenti 1 ſunt 18 millia. Patet igitur tot unitates, decades, centena, ac millia in ſumma *X* contineri, quot omnino continentur in numeris datis *A*, *B*, *C*. Quod totum patet ad oculum, ſcilicet

	FGHI	
	A 1966	
	B 7345	
	C 9289	
Unitates	20	20
Decades	18.	180
Centena	14..	1400
Millena	17...	17000
	X 18600	*X* 18600

PROPOSITIO III.

Additionem examinare.

Multiplici ratione fieri poteſt examen.

1. Eandem additionem repete, ſed ordine mutato, ut ſi prius ab imo ſurſum proceſſeris, deinde a ſummo deorſum deſcendas: nam ſi utraque ſumma inventa eadem fuerit, probabile eſt, nullum errorem irrepſiſſe.

B 2. A

2. A numeris addendis abiicitur 9 quoties potest, nulla habita ratione ordinis, aut loci, & residuum notatur in angulo crucis. Abjectisque deinde 9 ex summa *A*, ponitur residuum in altero angulo; quæ residua si fuerint æqualia, recte operatus es, quod patet sequenti exemplo:

	4824		9
	5721	6	
	3402		6
A	13947		

Hoc examen male audit ut fallax, nam si pro summa *A* alia longe major ponatur 19347, iisdem numeris ordine mutato constans, aut si eidem summæ *A* addas quotcunque volueris cyphras 0, semper remanet, abjectis novenariis, idem residuum 6. Ceterum ob summam ejus facilitatem non est rejiciendum.

3. Fit abjiciendo omnes numeros septenarios e qualibet summa particulari *A*, *B*, *C*, & ponendo seorsim residuum ut in *E*. Abjectisque deinde ex utraque summa *M*, & *N* septenariis, si residua in angulo crucis posita æqualia sint, res bene processit.

Sed nota discrimen inter hoc, & superius examen. Numerus novenarius abijcitur per additionem numeri ad numerum, ex. gr. ut abijciam 9 ex 134, sufficit addere simul 4 cum 3, & 1, & habetur statim novenarii residuum 8. At si abijcere velis 7 ex eodem 134, procedendum est per decades, abijciendo primum 7 ex 13, unde remanet 6, deinde ex 64, & residuum est 1.

A	3456	*E*	5		7	
B	7201		5	3		
C	3458		0			3
M	14115	*N*	10			

Ratio hujus, & præcedentis examinis desumitur ex *Axiom.* 3. *lib.* 1. *Eucl.* Si ab æqualibus demas æqualia, residua sunt æqualia.

PROPOSITIO IV.

De Subtractione Integrorum.

Subtractio est inventio excessus, quo numerus major superat minorem. En praxis.

1. Collocetur numerus minor sub majori, a quo debet subtrahi, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis respondeant, ut de additione dictum est *Prop.* 2.

2. Ducta linea, & dextrorsum incipiendo auferantur unitates ab unitatibus, decades ex decadibus &c. & id, quod remanet, scribatur infra lineam.

3. Si quis numerus inferior subduci non potest a superiori, quia illo major est, intelligatur addita numero ipsi superiori decas, factaque subtractione, ponatur residuum infra lineam: sed deinde numerus superior, qui sequitur, unitate minuitur, vel (idem enim est) subsequens numerus inferior augetur unitate.

4. Demum si numerus inferior sit superiori numero

æqualis, ponitur infra lineam o; vel linea —, si id contingat in fine operationis.

Sit exemplum. Debet quis alteri aureorum summam *A*, non habet nisi aureorum summam *B* solvendam, quærit quantum de ære alieno supersit.

A	1925
B	1382
C	-543

Primo aufer 2 ex 5, remanent 3, quæ scribe infra lineam. Deinde 8 subduci non potest ex 2, intellige decadem additam ipsi 2, fiet 12, ex quo aufer 8 remanent 4, scribenda infra lineam. At subsequens numerus superior 9, minuitur unitate, vel inferior 3 unitate augetur, proinde subductis 4 ex 9, residuum est 5, quod scribe infra lineam. Demum auferendo 1 ex 1 nihil remanet, scribe lineam. Debebit igitur adhuc aureos 543, cum talis sit excessus numeri majoris *A* supra minorem *B*.

Similiter subduci debet numerus *N* ex numero *M*, quæritur excessus, seu residuum *X*.

M	620010027
N	31957684
X	588052343

Aufer 4 ex 7, residuum est 3. Item 8 ex 12, residuum est 4. Pariter 7 ex 10, residuum est 3. Similiter 8 ex 10, residuum est 2, tum 6 ex 11, residuum est 5, & 10 ex 10, residuum est o &c.

Exa-

Examen subtractionis generatim fit addendo residuum *X* numero minori subtracto *N*. Nam si erratum non sit, restituitur major numerus *M*, ut patet.

Examen fieri quoque potest per abjectionem novenarii. Nam abjecto novenario ex *A*, quantum abjici potest, residuum est 8. Deinde abjecto novenario ex numeris *B* & *C*, æqualibus ipsi *A*, residuum pariter est 8.

A	6434
B	521
C	5913

$$\begin{array}{c|c} 8 & 9 \\ \hline & 8 \end{array}$$

Demonstr. Subtractionis per se patet. Nam ex *Defin.* Subtractio est inventio excessus, quo numerus major superat minorem, proinde excessus una cum minori numero adæquat majorem; adeoque tot unitates, decades, & centena debent esse in *B*, & *C* simul, quot sunt in *A*. Sed subducendo 1 ex 4, ponitur residuum 3. Sunt ergo tot unitates in *B*, & *C* simul, quot sunt in *A*, nempe 4. Similiter subducendo decades 2 ex decadibus 3, ponitur 1 in residuo. Igitur decades *B* & *C* æquales sunt decadibus in *A* contentis nempe 3, & sic deinceps. Est ergo æqualitas inter *A*, & *B* una cum *C*. Quod &c.

PRO-

PROPOSITIO V.

De Multiplicatione Integrorum.

M*Ultiplicatio* est ductus unius numeri in alium, ex quo alter toties augetur, quoties in altero unitas continetur.

Vel *Multiplicatio* numeri per numerum est inventio numeri, qui toties contineat numerum multiplicatum, vel multiplicantem, quot alter continet unitates. Ut numerus *A* 12 multiplicatus per *B* 3 producit numerum *C* 36, qui ter continet *A*, sicuti *B* ter continet unitatem. Hinc patet multiplicationem esse compendiosam additionem; idem enim est multiplicare *A* per *B*, ac toties addere ipsum *A*, quot sunt in *B* unitates.

Numeri *A* & *B* dicuntur *multiplicatores*, seu *factores*, numerus *C* *productum*, seu *factum*. Vulgo tamen qui minor est, & inferius scribitur, dicitur multiplicator, seu multiplicans, major autem multiplicandus appellatur. En praxis.

1. Si multiplicator unica figura constet (ut in primo sequenti exemplo) illa ducatur sigillatim in omnes multiplicandi figuras, initio facto a dextra versus sinistram; & quot productum continet decades, tot reserventur unitates sequenti producto adjiciendæ, & scribatur infra lineam id, quod remanet.

2. Si multiplicator pluribus constet figuris, tunc singulæ seorsim ducantur in singulas numeri multiplicandi figuras, sed producta ita infra lineam scribantur, ut productum secundæ figuræ ponatur directe sub ipsa secunda figura, productum tertiæ figuræ sub tertia, & sic deinceps, cum hæc producta importent decades, centena &c.

3. Ducta linea, singula producta particularia in unam summam colligantur, ut habeatur integrum productum quæsitum.

Sit exemplum 1. Vendendi sunt agni *A* juliis 5 in singula capita, quæritur pretium *C*.

A	1 2 7 6.	*multiplicandus.*
	5.	*multiplicans.*
C	6 3 8 0.	*productum.*

Primo 6 quinquies sumptus facit 30, pono 0, & sequenti producto addo tres unitates ob tres decades producti primi. Itaque 7 quinquies sumptus facit 35, addo 3 fiunt 38, scribo infra lineam 8, & reservo 3. Tum 2 quinquies sumptus facit 10, addo 3 fiunt 13, scribo infra lineam 3, & servo 1. Demum 1 quinquies sumptus facit 5, addo 1 præcedentem, & scribo 6.

Exemplum 2. Quæritur quot horas annus unus contineat, qui dies 365 continere supponitur.

Dies	3 6 5
Horæ	2 4
	1 4 6 0
	7 3 0
Horæ	8 7 6 0

Exem-

Exemplum 3. Aerarii præfectus exigit annuatim ab oppidis 824 aureos 102, quæritur aureorum summa.

Opp.	824
Aur.	102
	1648
	8240
Aur.	84048

Coroll. Hinc patet, quod si in multiplicatore occurrit cyphra 0, ponitur in producto cyphra (vel plures, si sint) deinde statim continuatur multiplicatio ceterorum numerorum, quod ex præcedenti exemplo manifestum est.

Schol. I. *Cyphræ initiales ante operationem resecantur; operatione autem peracta, producto adduntur quotquot sunt. Pariter si multiplicandus sit numerus per* 10, *vel* 100, *vel* 1000 *&c. satis est addere multiplicando ad dexteram tot cyphras, quot continentur in multiplicatore, sine ulla alia operatione, quia unitas non multiplicat. Utrumque patet exemplis* A *&* B.

A 136|0	*B* 15724
2|00	1,000
272,000	15724,000

Schol. II. *Multiplicatio fit etiam per factores numeri multiplicantis, vel multiplicandi. Sic idem est multiplicare* 30 *per* 24, *ac* 30 *per* 4 *&* 6. *Item* 30 *per* 12 *&* 2, *vel per* 8 *&* 3, *qui omnes sunt factores ipsius* 24.

Schol.

Schol. III. *Multiplicatio facile perficitur ab iis, qui probe callent producta, quæ fiunt ex numeris simplicibus in numeros simplices, unde componitur Tabula, quæ ab inventore Pythagora vocatur* Pythagorica. *Usus illius est: si scire velis productum ex. gr. ex* 3 *in* 8, *quære* 3 *in columna* AB, *&* 8 *in fronte* AC, *invenies in communi concursu productum* 24. *Sic de ceteris. Ratio est, quia columna prima incipit ab unitate, & descendendo crescit usque ad* 9. *Secunda incipit a binario, tertia a ternario &c. semper usque ad* 9 *progredientes. Prima crescit sola unitate, secunda numero binario, tertia ternario &c. In exemplo allato numerus* 8, *qui crescit numero octonario, habet in tertia sede numerum* 8 *ter sumptum, scilicet* 24. *Idem numerus* 8 *habet in quinta sede* 40, *hoc est* 8 *quinquies sumptum, & sic de ceteris.*

A *Tabula Pythagorica.* C

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

B D

Multiplicationis examen fieri poteſt per abjectionem novenarii, aut ſeptenarii. Nam 1° abijcitur 9, vel 7 ex numero multiplicando *A*, & reſiduum ponitur in angulo crucis *M*. 2° Reijcitur 9, vel 7 ex multiplicante *B*, cujus reſiduum ponitur in angulo crucis *N*. 3° Multiplicantur inter ſe *M* & *N*, & ex producto abijcitur 9, vel 7, reſiduumque ſcribitur in angulo *R*. 4° Rejectis 9, vel 7 ex producto *C*, habetur reſiduum, quod ſi æquale ſit reſiduo priori *R*, res bene proceſſit.

A	3506
B	132
D	7012
E	10518
F	3506
C	462792

9

M 5 | 3 *R*

N 6 | 3 *T*

7

6 | 1

6 | 1

Fit etiam *examen per diviſionem*. Nam ſi dividatur productum C per alterutrum factorem *A* vel *B*, prodibit in quotiente alter factorum *A*, vel *B*. Sed prius intelligendum, quid ſit diviſio; de qua in ſequenti *Propoſ.*

Demonſtr. Cum multiplicatio ſit compendioſa additio, ut dictum eſt, multiplicatio numeri *A* per notam ultimam numeri *B*, nempe per 2, eſt addere ipſum numerum *A* bis, unde producitur *D* 7012; in quo tot ſunt unitates, decades, ac centena, quot habentur in *A* bis ſumpto. Similiter multiplicatio

ejuſ-

ejuſdem numeri *A* per ſecundam notam numeri *B*, nempe per 3, qui ſignificat 30, eſt additio ipſius *A* ſumpti trigeſies, unde productum *E* tot continet unitates, decades, centena &c. quot continentur in *A* trigeſies ſumpto. Demum productum *F* habetur ex multiplicatione numeri *A* per 1, hoc eſt per 100; adeoque tot unitates, decades &c. continentur in *F*, quot continentur in *A*, ſi centies ſumatur. Igitur tres numeri *D*, *E*, *F*, ſeu productum integrum *C*, tot continet unitates, decades &c. quot continentur in *A* centum trigeſies, & bis ſumpto. Quod erat &c.

PROPOSITIO VI.

De Diviſione Integrorum.

Diviſio eſt inventio numeri, qui toties unitatem contineat, quoties numerus dividendus continet diviſorem. Numerus inventus dicitur *quotiens*, *quotus*, vel *exponens*; exponit enim per ſuas unitates, quoties diviſor continetur in diviſore. Itaque dividendo numerum 12 per numerum 3, invenitur quotus, ſive exponens 4, qui toties continet unitatem, quoties dividendus 12 continet diviſorem 3.

I. Sit diviſor numerus ſimplex 5, per quem dividendus eſt numerus datus 1580455. Ponatur diviſor ſiniſtrorſum ſeorſim poſt lineam, ut in *M*.

Diviſor M 5) 1580455. *dividendus*.
316091. *quotus*.

Et

Et procedendo a finiſtra in dexteram, vide quoties 5 continetur in 15, nempe ter, ſubſcribe 3. Deinde vide quoties idem 5 continetur in ſubſequenti numero 8, continetur ſemel, & remanent 3. Scribe 1 ſub ipſo 8, tum adde decades tres ſequenti figuræ dividendi, fiunt 30, quibus diviſis per 5, habetur quotus 6, quem pone ſub o. Poſtea 4 dividi nequit per 5, utpote minor, pone igitur o in quoto, & adde quatuor decades ſubſequenti numero 5, fiunt 45, quæ dividantur per 5, erit quotus 9, quem ſubſcribe. Demum dividendo 5 per 5, habetur quotus 1. Quotus igitur quæſitus eſt 316091. Hic dividendi modus vulgo dicitur: *partire a colonna*.

Fieri etiam poteſt hæc diviſio præſidio tabulæ Pythagoricæ, de qua in *præc. Propoſ.* Nam numerus dividendus in media area reperitur; diviſor vero in latere AB, & quotus in fronte AC. Sit dividendus numerus 40 per 5, reperto 40 in area, & diviſore 5 in latere AB, invenitur in fronte AC quotus 8. Quod ſi dati numeri 40 diviſor ſit 8, invenietur in fronte quotus 5; & ſic de aliis.

Sin autem numerus dividendus in area tabulæ præciſe non reperitur, ut ſi dividendus ſit 50 per 6; ſumitur numerus proxime minor, cui directe reſpondet diviſor 6 in latere exiſtens, nempe 48, & in fronte occurit 8, qui erit quotus quæſitus.

Examen hujuſce diviſionis fit multiplicando quotum per diviſorem. Si erratum non ſit, reſtituitur idem numerus, qui fuit diviſus, ut patet.

II. Quod ſi diviſor ſit numerus compoſitus, pluribus conſtans figuris, alia via procedendum. Dividendus ſit numerus datus A per numerum B.

B 45)	A 186730
	180
C 4149)	—67
	45
	223
	180
	—430
	405
	—25

1. Accipe ex dividendo A tot figuras ſiniſtrorſum, quot ſunt in diviſore B. Vel accipe tot figuras ex numero dato A, quot per diviſorem B dividi poſſint; ut in hoc exemplo 186, easque ſecerne puncto. Erit 186 primum diviſionis membrum.

2. Vide quoties diviſor B contineatur in 186: quod quia primo intuitu dignoſcere haud facile eſt, vide quoties prima diviſoris figura 4 contineatur in 18; patet contineri quater, & remanent 2, quæ cum ſequenti figura 6 faciunt 26, in quo ſecunda diviſoris figura 5 pariter continetur quater (nihil autem refert, ſi pluries contineatur) totus ergo diviſor 45 continetur quater in toto diviſionis membro 186, proinde pone 4 in C.

3. Per quotum C multiplica totum diviſorem B 45, & productum 180 ſubſcribe ipſi 186, a quo illud ſubtrahe *per Propoſ.* IV., remanent 6.

4. Ad hoc residuum 6 junge dextrorsum subsequentem dividendi figuram 7, erit 67 secundum divisionis membrum; eademque omnino operatio instituenda est: quam breviter in gratiam tyronum prosequar, scilicet:

Quære quoties divisor 45 contineatur in 67, patet contineri semel, scribe ergo in *C* 1, per quem multiplica totum divisorem *B*, & productum 45 subscribe ipsi 67, factaque subtractione, habetur residuum 22.

Ad hoc residuum 22 adjunge sequentem dividendi figuram 3, fiet tertium divisionis membrum 223. Circa quod rursus eadem operatio repetenda est.

Proinde vide quoties divisor 45 continentur in 223: seu quoties prima figura 4 contineatur in 22, patet contineri quinquies, & remanent 2, quæ una cum sequenti figura 3 faciunt 23. Sed secunda divisoris figura 5 non continetur quinquies in 23, proinde quotus ille 5 minui debet unitate (vel etiam pluribus, si opus sit) & reponitur 4 in *C*, per quem multiplicato divisore *B*, habetur productum 180, quod subscribe ipsi 223, ab eoque subtrahe, remanent 43.

Junge demum ad 43 ultimam dividendi figuram 0, erit quartum divisionis membrum 430, quocirca eadem praxis facienda est. Vide igitur quoties 4 contineatur in 43, dic contineri tantum novies (nam nullus quotus ponitur in *C* major, quam 9) remanent 7, quæ cum cyphra faciunt 70, in quo pariter altera divisoris nota 5 continetur novies. Itaque multiplicando divisorem 45 per 9 habetur productum 405, quod subtrahendum est ab ipso 430, & residuum divisionis est 25. Quotus ergo quæsitus *C* est 4149, & remanent 25.

Co-

COROLL. Ex præcedenti exemplo tria sunt colligenda. 1. Si secunda, tertia, aut quarta divisoris nota toties contineri non possit in secunda, tertia, aut quarta nota dividendi, quoties prima ejusdem divisoris nota continetur in prima nota dividendi, tunc quotum una, vel pluribus unitatibus esse minuendnm. 2. In quoto nunquam reponi numerum majorem novenario, etiamsi divisor pluries, quam novies contineatur in dividendo. 3. Integrum quotum tot figuris constare, quot sunt divisionis membra.

Sit aliud exemplum. Dividere oporteat numerum datum *M* per numerum *N*.

```
N 179)        M 733̇94475
                716
                ———
R 410025)      -179
                179
                 ———
                000447
                   358
                   ———
                  -895
                   895
                   ———
                   000
```

1. Secerne puncto ex dividendo *M* tres figuras 733 quot sunt in divisore *N*, erit primum divisionis membrum 733. Jam prima divisoris nota continetur in prima dividendi nota septies, sed cum secunda, & tertia

divi-

diviſoris nota contineri non poſſint in ſecunda, & tertia nota dividendi pluries quam quater, minuitur 7. tribus unitatibus, & ponitur in *R* quotus 4.

2. Duc diviſorem *N* in 4, & productum 716 ſubſcribe ipſi 733, a quo ſubtrahendum eſt, remanet 17. Adde ex dividendo ſubſequentem figuram 9, faciunt 179, eritque ſecundum diviſionis membrum, in quo patet, diviſorem contineri ſemel, proinde pone in quoto 1, per quem multiplicando diviſiorem, habetur productum 179, ſubducendum ex ipſo 179, adeoque remanet 0.

3. Diviſor contineri non poteſt in duabus ſubſequentibus dividendi figuris 44, pone ergo in quoto totidem cyphras, & adde ad 44 aliam figuram ex dividendo, nempe 7, quæ faciunt 447, in quibus diviſor continetur bis. Pone igitur in quoto 2, & cetera proſequere, ut ſupra. Erit quotus *R* 410025 ſine ullo reſiduo.

SCHOL. I. *Quod remanet poſt ſingulas ſubtractiones, nunquam poteſt eſſe æquale, aut majus diviſore, alias fuit erratum. Aſſumptus enim fuit quotus juſto minor. Contra vero ſi productum ex quoto in diviſorem majus ſit reſiduo diviſionis, ex quo fieri debet ſubtractio, ita ut ſubtractio fieri non poſſit, ſignum eſt, quotum aſſumptum eſſe juſto majorem, ac proinde eſſe minuendum. Utrumque caſum tyrones diligenter advertant.*

SCHOL. II. *Si abſoluta diviſione, aliquid remanet, ut in primo exemplo contigit, reſiduum illud ponitur ſupra lineam, & ſub eadem ponitur diviſor, atque hinc oriuntur fractiones, de quibus in capite* III.

SCHOL.

SCHOL. III. *Qui ſunt in hac dividendi praxi peritiores, producta ex ſingulis quotis in diviſorem non ſubſcribunt, ſed illa memoria retinentes, ſtatim ſubtrahunt ex membro diviſionis, & notant reſiduum. Sic dividendo* 305802 *per* 809, *operatio fit expeditiſſima, ut ſequitur.*

809	305802
378	6310
	6472
	—00

SCHOL. IV. *Si diviſor habeat in fine unam, vel plures cyphras, ut* 120, 300, 4000 *&c. abſcinduntur ab illo cyphræ, totidemque figuræ a dividendo dextrorſum, deinde fit, ut moris eſt, diviſio cum reliquis figuris; ſed abſoluta operatione, figuræ ex dividendo abſciſſæ ponuntur ſupra lineam, infra quam ponitur diviſor integre ſumptus cum cyphris. Ut ſi dividendus ſit* 635 *per* 200. *Abſcinde duas cyphras ex* 200, *& duas figuras dextrorſum ex dividendo* 635; *diviſo deinde* 6 *per* 2, *habetur quotus* $3\frac{35}{200}$. *Quod ſi prima diviſoris nota fuerit* 1 *& reliquæ omnes cyphræ, ut* 10, 100, 1000 *&c. confecta erit diviſio, ſi ad dexteram dividendi abſcindas totidem figuras, quot ſunt in diviſore cyphræ; nam unitas non dividit. Proinde dividendo* 145690 *per* 10000, *quotus erit* $14\frac{5690}{10000}$; *dividendo per* 1000, *quotus erit* $145\frac{690}{1000}$ *&c.*

SCHOL. V. *Eſt alius non inelegans dividendi modus, quem Itali vulgo vocant*, partire per ripiego; *qui tunc ſolum adhiberi poteſt, cum diviſor poteſt reſolvi in ſuos factores. Sit dividendus numerus* 15460 *per* 45, *quia diviſor*

 ſor

sor 45 resolvi potest in suos factores 5 & 9, ex quibus componitur, divido primo per 5, quotus est 3092, divido deinde quotum 3092 per 9 oritur quotus quæsitus 343 $\frac{5}{9}$. Similiter dividendus sit 13463 per 36, quia 36 componitur ex 4 & 9, divide per 4 numerum datum, quotus erit 3365 $\frac{3}{4}$, hunc divide per 9, quotus erit 373 $\frac{8}{9}$, ex duabus illis fractionibus fiet unica fractio, si 3 & 8 inter se, deinde 4 & 9 inter se multiplicentur, unde erit 373 $\frac{24}{36}$ quotus quæsitus.

Examen divisionis fit per multiplicationem. Nam multiplicando divisorem per quotum, restituitur numerus dividendus, modo illi addatur, si quid ex divisione remansit.

Vel fit examen per abjectionem 9, vel 7. Nam rejectis primo 9, vel 7 tum ex divisore, tum ex quoto, residua 8 & 4 notantur in angulo crucis sinistro *A* & *B*, & ducuntur inter se, deinde producti residuum 5, abjectis 9 vel 7, ponitur in vertice ipsius crucis *D*, cui quidem additur residuum divisionis factæ, ablatisque ex hac summa 9 vel 7, quod remanet 0, ponitur in angulo crucis dextero *C*, cui æquale debet esse id, quod restat ex dividendo, abjectis pariter 9, vel 7, & notatur in *E*. Patet sequenti exemplo *M*.

35 *M* 4563 *D* 5 0
A 8 | 0 *C* 0 | 6
130 106
—13 *B* 4 | 0 *E* 4 | 6

Demonstr. Ex praxi a nobis tradita tot notis constare debet quotus, quot sunt membra divisionis, ut

ut *in Coroll. n.* 3. dictum est. Sed singulæ quoti notæ toties unitatem continent, quoties singula divisionis membra divisorem: nam in primo exemplo, in quo dividitur 186730 per 45, primum membrum divisionis 186 continet quater divisorem 45, sicuti prima quoti nota 4 continet unitatem. Siquidem ex regula tradita 45 ducitur in 4, & productum 180 (divisoris 45 quadruplum) subtrahitur ex membro divisionis 186. ergo patet, divisionis membrum 186 quater continere divisorem, sicuti quotus 4 totidem unitates continet, alias subtrahi non posset. Remanet quidem, facta subtractione, numerus senarius, sed hic sequenti figuræ 7 jungitur pro secundo divisionis membro, ut dictum est. Pari ratione idem ostenditur de singulis ipsius quoti notis; unde sequitur integrum quotum 4149 toties unitatem continere, quoties dividendum 186730 continet divisorem 45, adeo ut quotus 4149 æque multiplex sit unitatis, ac dividendum æque multiplex est divisoris, & supersint 25.

PROPOSITIO VII.

De divisione integrorum per numeros divisoris multiplices.

Methodus dividendi numerum per numeros divisoris multiplices adhiberi potissimum potest, cum numerus dividendus est valde prolixus.

Sit exemplum. Ex doctrina Tychonis sol motu diurno horarum 24 peragit orbitam milliariorum Italico-

 rum

rum 2140011712, quæritur quot milliaria conficiat uno horæ minuto. Reducantur horæ 24 in minuta, multiplicando illas per 60, erit divisor, per quem dividi debet numerus milliariorum *A*, 1440, seu 144, (ablata ab ipso cyphra, & ex dividendo *A* ultima nota dextrorsum 2) qui ponatur ad dextram dividendi, ut in *B*, & notetur punctum sub tertia ipsius dividendi nota 4, cum divisor *B* semel contineatur in 214, ut in *præc. propos.* dictum est. Tum scribantur sub ipso divisore *B* singuli multiplices 288, 432, 576 &c. cum notis appositis 1, 2, 3, 4 &c. ut in exemplo.

Quia vero divisor *B* continetur semel in 214, scribatur 1. in quoto *C*, subtractoque divisore ipso ex 214, remanent 70, additaque sequenti figura dividendi, fiunt 700. Tunc observetur qualis ex multiplicibus sub *B* existentibus sit proxime minor, quam 700, patet illum esse 576. Pone igitur in quoto notam illi appositam 4, & subtrahe ipsum 576 ex residuo 700, remanent 124, quibus addita figura sequenti, habetur 1240. Iterum jam observa, qualis multiplex sit proxime minor ipso 1240; reperitur 1152, cui apposita est nota 8, hanc pone in quoto *C*, & illum subtrahe ex residuo 1240, residuum est 88, & sic deinceps, donec exhauriantur omnes dividendi figuræ. Sic enim nullo fere labore invenitur quotus C 1486119, cum residuo $\frac{352}{1440}$, quod quartam fere milliarii partem importat, ut in *Cap. sequen.* explicabitur.

Sol igitur ex doctrina Tychonis unico horæ minuto conficit milliaria Italica 1486119.

C	*A*	*B*	
1486119)	2140011712	144	1
	144	288	2
	———	432	3
	−700	576	4
	576	720	5
	———	864	6
	1240	1008	7
	1152	1152	8
	———	1296	9
	−881		
	864		
	———		
	−171		
	144		
	———		
	−277		
	144		
	———		
	1331		
	1296		
	———		
	−35		

CAPUT II.

Regulæ vulgaris Arithmeticæ hactenus traditæ applicari jam debent numeris *denominatis*, hoc est numeris diversarum specierum. Quod quidem difficile non erit, si dignoscatur valor unius speciei respectu alterius; nimirum quot partes minoris speciei majorem speciem constituant. Sic ut addantur, vel subtrahantur dies, horæ, ac minuta, necesse est scire minuta temporis 60 unam horam, horas autem 24 diem unum efficere. Idem de monetis, ponderibus, ac mensuris valet: quæ licet pro diversitate Provinciarum, imo & Urbium variæ sint, modus tamen eas calculandi est ubique proportionaliter idem; adeo ut si quis unius loci monetas, pondera ac mensuras addere, subtrahere, multiplicare, ac dividere noverit, ad alterius quoque regionis calculum easdem regulas applicare facile poterit.

PROPOSITIO I.

De Additione numerorum denominatorum.

I. *Exemplum sit* de vulgari moneta Romana, quam componunt scuta, asses, & quadrantes; hoc est quadrantes 5 assem 1, & asses 100 scutum 1, quod decem denariis argenteis, seu juliis constat.

Disponantur species similes sub similibus; ac primo quidem loco dextrorsus species minimæ, tum ordine majores usque ad maximam; ut in hoc exemplo primo collocentur quadrantes, secundo asses, tertio scuta; & si quæ species intermedia desit, vacuus ejus locus repleatur cyphra.

Tum addendo quadrantes 1, 4, 3, 0, fiunt 8, quibus continetur assis 1, & remanent 3, quæ scribe infra lineam. Adde deinde assem 1 ad sequentem seriem assium, nempe ad 5, 0, 8, 5 fiunt 19 asses. Scribe 9 infra lineam, & pro decade una adde 1 ad assium decades 1, 2, 9, 3, sunt decades 16, hoc est asses 160; reserva itaque decades 10, (centena nempe 1.) pro sequenti specie, & scribe infra lineam 6. Addantur denique unitates, decades, & centena scutorum eo modo quo factum est *in Propos.* 2. *Cap.* 1. cum sint numeri homogenei, prodibit summa scutorum 5099, asses 69, quadr. 3.

	Scut.	*Ass.*	*Quad.*
	230.	35.	0.
	572.	98.	3.
	784.	20.	4.
	3512.	15.	1.
Summa	5099.	69.	3.

II. Libra in Urbe constat unciis 12, uncia vero denariis 24. Addendæ sint ergo.

	Lib.	*Unc.*	*Den.*
	38.	10.	23.
	70.	11.	16.
	352.	05.	22.
Summa	462.	04.	13.

Ha-

Habentur libræ 462, unc. 4, den. 13. Nam denarii 22, 16, 23 additi faciunt 61, in quibus bis continetur 24, hoc eſt unciæ 2, quæ ſequenti columnæ addendæ ſunt, & remanent denarii 13, quos ſcribe infra lineam. Similiter unciæ 5, 11, 10 cum duabus præcedentibus faciunt 28, qui continet bis 12, nempe libras 2, ſequenti columnæ addendas, & remanent unciæ 4, quæ pariter ſcribuntur infra lineam. Demum additis libris 2 ad prædictam librarum columnam, continuatur additio, ut in *propoſ.* 2. *Cap.* 1, & habentur libræ 462, unc. 4, den. 13.

III. Addendi ſunt pedes Pariſienſes, pollices, & lineæ. Pes autem Pariſienſis in pollices 12, pollex vero in lineas 12 dividitur. Sint ergo.

	Pedes.	*Poll.*	*Lin.*
	128.	10.	9.
	320.	11.	2.
	572.	08.	7.
Summa	1022.	06.	6.

Quod quidem manifeſtum eſt: nam 7, 2, 9 faciunt lineas 18, hoc eſt pollicem 1, qui reſervatur ſequenti columnæ addendus, & ſcribitur infra lineam reſiduum 6. Deinde pollices 8, 11, 10 cum 1 præcedenti, fiunt 30, qui bis continent 12, hoc eſt pedes 2 ſequenti columnæ addendos, & ſcribitur infra lineam reſiduum 6. Demum additis pedibus 2 ad primam columnam ſequentem, continuatur additio, ut in *propoſ.* 2. *Cap.* 1. cum ſint numeri homogenei.

Exa-

Examen fieri poteſt ſic: completa ſuperioris exempli additione, duc lineam ſub ordine numerorum *A*; atque iterum adde omnes numerorum ordines modo jam explicato, præter ſolum ordinem *A*, qui relinquitur: habebis alterum aggregatum *C*, quod deficit ab aggregato primo *B*, defectu numerorum ordinis *A*. Si ergo aggregato *C* addas numeros *A*, habebis aggregatum *D* æquale aggregato primo *B*; alias fuit erratum. Hoc examen uſurpari quoque poteſt pro numeris homogeneis, ut patet.

	Ped.	*Poll.*	*Lin.*
A	128.	10.	9.
	320.	11.	2.
	572.	08.	7.
B	1022.	06.	6.
C	893.	07.	9.
D	1022.	06.	6.

PROPOSITIO II.

De Subtractione numerorum denominatorum.

Diſponantur ſpecies ſimiles ſub ſimilibus, ut in *præc. propoſ.* dictum eſt, & numerus minor, ſeu ſubtrahendus, collocetur ſub majori, a quo debet ſubtrahi.

Quoties inferior numerus a ſuperiori ſubduci nequit,

quit, utpote illo major, toties numero superiori addatur unum integrum sequentis speciei, ut fiat major subtrahendo. Deinde numerus speciei, ex qua sumptum fuit illud integrum, unitate minuatur. Quod exemplis patebit.

I. Ex pecunia accepta *A* subtrahenda sit pecunia expensa *B*. Quia quadrantes 4 subtrahi nequeunt ex quadrantibus 3, sumo 1 ex assibus 28, hoc est quadrantes 5, qui cum 3 faciunt quadrantes 8, ex quibus subductis 4, remanent 4 infra lineam scribendi. Deinde minuendo unitate asses 28, vel augendo unitate (idem enim est) asses 36, ita ut prima figura 6 fiat 7, subducitur 7 a superiori numero 8, & scribitur infra lineam residuum 1. Rursus quia 3 subtrahi nequit ex 2, sumo 1 ex scutis, ut ad 2 addantur 10, ac fiat 12, ex quo subtractis 3, residuum, quod scribitur infra lineam, est 9. Minuitur deinde 8, vel augetur 7 unitate, & fit 0. Tum continuatur subtractio, ut in *propos.* 4. *Cap.* 1, & habetur residuum *C* scut. 140, afs. 91, quadr. 4.

	Scut.	*Afs.*	*Quadr.*
A	198.	28.	3.
B	57.	36.	4.
C	140.	91.	4.

II. Subtrahendus sit numerus *N* ex numero *M*, scilicet.

	Dies.	*Horæ.*	*Min.*
M	21.	14.	53.
N	10.	13.	57.
Q	11.	00.	56.
	21.	14.	53.

Cum minuta 57 subtrahi nequeant ex minutis 53, desumitur unum integrum ex sequenti specie, nempe hora 1, seu minuta 60, quæ addita minutis 53, faciunt min. 113, ex quibus subtractis 57, scribitur infra lineam residuum 56. Aucto deinde unitate numero 13 fit 14, adeoque facta subtractione, nullum est residuum, & scribitur 0. Demum subductis 10 ex 21 residuum est 11. Est ergo numerus quæsitus *Q* dies 11 min. 56.

Examen fit addendo residuum *Q* numero minori *N*, nam facta additione, ut in *propos. præc.* dictum est, restituitur major numerus *M*, si erratum non fuerit.

PROPOSITIO III.

De multiplicatione numerorum denominatorum.

Primo reducantur omnes species ad minimam, ut si multiplicandæ sint libræ, solidi, ac denarii, reducantur omnes ad denarios. Deinde species reductæ multiplicentur, ut moris est, per *propos.* 5 *Cap.* 1. Productum vero reducitur ad majorem speciem per divisionem.

I. *Sic exemplum*, Plancus expendit singulis diebus libras 5, solidos 15, denarios 8. Scire cupit, quantum toto anno, seu diebus 365 expendet. Cum denarii 12 solidum unum, solidi vero 20 libram constituant, duc libras 5 in 20, & producto adde 15, habebis solidos 115. Quos quidem duc in 12, & producto adde 8, habebis denarios 1388: qui multiplicandi sunt per dies 365, fitque per *propos.* 5. *Cap.* 1 productum denariorum 506620. Hos divide per 12, habebis solidos 42218, & denarios 4; Utque solidi ad libras reducantur, divide illos per 20, erunt libræ 2110, & solidi 18. Itaque Plancus uno anno expendet lib. 2110, sol 18, den. 4. En totius reductionis typus.

	20
Lib.	5
	100
adde	15
Sol.	115
	12
	230
	115
	1380
adde	8
Den.	1388

II. *Sit exemplum*, Cum sol motu proprio conficiat singulis diebus minuta 59, & secunda 8, quæritur quantum progrediatur diebus 30. Reducantur minuta 59 ad secunda, multiplicando illa per 60, & addendo 8 ad eorum productum fient, secunda 3548, quæ multiplicari debent per dies 30. Erit per *propos.* 5. *Cap.* 1 productum 106440 secundorum. Hæc divide per 60, quotus dat minuta 1774, quæ quidem si iterum dividas per 60, habebis gradus 29, & min. 34, quos sol motu proprio percurrit in Eccliptica diebus 30.

Examen multiplicationis fit per divisionem, de qua *in sequenti propos.*

PROPOSITIO IV.

De divisione numerorum denominatorum.

Tam divisoris, quam dividendi species reducantur ad minimam, ut factum est in *præc. Propos.* Tum fiat divisio *per Propos.* 6. *Cap.* 1.

I. Emit quis serici ulnas 60, pal. 6, unc. 10, expenditque scuta Romana 292, asses 10, quæritur quanti steterit ulna. Duc ulnas 60 in 8, ut fiant palmi; & adde producto 6, erunt palmi 486. Hos duc in 12, ut fiant unciæ, additisque unciis 10, erunt unciæ 5842. Reducantur pariter scuta ad asses, & addantur asses 10, fient asses 29210. Itaque dividantur per *prop.* 6. *Cap.* 1 asses 29210 per 5842, quotus est 5; hoc est uncia quælibet valet assibus 5, proinde unciæ 12, seu palmus, valet assibus 60, adeoque palmi 8, sive ulna, valet assibus 480, hoc est scut. 4, assibus 80.

II. Fingamus lunam distare ab aliqua fixa gr. 45, min. 30, sec. 25, quæritur quanto tempore stellam illam luna

luna assequetur. Ex Tab. Alfonsinis luna motu suo diurno conficit gr. 13. min. 10, sec. 35. Proinde dividendi sunt gradus 45, min. 30, sec. 25 per gradus 13, min. 10, sec. 35, ut habeatur appulsus lunæ ad fixam.

Primo duc gr. 45 in 60, & producto adde 30, fient minuta 2730. Hæc duc rursus in 60, & adde producto 25, habebis sec. 163825, numerus scilicet dividendus. Eodem pacto invenietur divisor, nempe min. sec. 47435. Tum facta divisione per *propos.* 6. *Cap.* 1. habetur quotus 3, hoc est dies 3, & remanent min sec. 21520, quæ si multiplicaveris per 60, fient min. tertia 1291200. Hæc autem divisa per eundem divisorem dant in quoto min. prima 27, & remanent min. tertia 10455, quæ si multiplicentur per 60, fiunt min. quarta 627300; hæc autem per eundem divisorem divisa dant in quoto min. secunda 13. Luna igitur ad stellam perveniet diebus 3, min. 27, sec. 13.

Examen divisionis fit per multiplicationem. Nam si in exemplo primo multiplicaveris per *propos. præc.* ulnas 60, pal. 6, unc. 10 per scut. 4 ass. 80, hoc est uncias 5842 per asses 480, fiet productum 2804160, quod divisum primo per 12, deinde per 8, dabit in quoto scut. 292. 10. Similiter in secundo exemplo ducto divisore 47435 in quotum 3, additoque ad productum residuo 21520, restituitur numerus, qui fuit divisus 163825.

CA-

CAPUT III.

De Calculo Fractorum

DEFINITIONES.

I. Numerus *fractus*, qui & *fractio*, vel *minutia* dicitur, est pars, seu partes alicujus numeri integri in plures æquales partes divisi. Ut si totum aliquid dividatur in tres partes æquales, & ex illis quispiam duas partes obtineat, dicetur habere duas tertias partes, scilicet $\frac{2}{3}$, quæ fractionem efficiunt.

Itaque ad numeros fractos exprimendos duo numeri requiruntur, alter qui scribitur supra lineam, & dicitur *Numerator*, quia numerat partes, quæ de illo toto diviso habentur; alter qui scribitur infra lineam, & dicitur *Denominator*, seu *Nominator*, quia nominat in quales partes illud totum fuerit divisum, nempe tertias, quartas, nonas &c. videlicet.

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{7},\ \frac{4}{9},\ \frac{11}{20}\ \&c.$$

Quæ fractiones sic pronunciantur, *una dimidia*, *una tertia*, *duæ septimæ*, *quatuor nonæ*, *undecim vigesimæ &c.* intelligitur pars, seu partes.

Si numerator æqualis sit denominatori, minutia æqualis est uni integro. Sic $\frac{3}{3}$ æquivalent uni integro in tres partes æquales diviso. Adsunt enim omnes partes illius integri, adeoque $\frac{3}{3}$ sunt 1. Item $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{8}{8}$ &c. significant 1. Hinc patet, unitatem esse illud totum divisum in partes tertias, quintas, sextas &c.

Si

Si numerator fuerit denominatore major, tunc minutia erit plus quam unum integrum. Sic $\frac{4}{3}$ plus sunt quam unum integrum in tres partes divisum, sed important 1, & insuper $\frac{1}{4}$. Similiter $\frac{16}{5}$ significant tres integros, & adhuc $\frac{1}{5}$.

II. *Minutia minutiæ* est pars alterius minutiæ, ut si fractionis $\frac{3}{4}$ sumatur dimidia pars, nempe $\frac{1}{2}$, erit hæc minutia minutiæ, quæ a majori distingui solet per interpositam lineam. Sic $\frac{1}{2}|\frac{3}{4}$ significat dimidium trium quartarum.

Compendii gratia utemur in posterum signis, quæ sequuntur.

$=$ *Signum æqualitatis*. Sic $a = b$ significat duas quantitates a & b esse æquales.

$+$ *Plus. Signum additionis*. Ut $a + b$ significat summam duarum quantitatum a, & b. Sic $3 + 5$ significat summam 8, & exprimitur $3 + 5 = 8$.

$-$ *Minus. Signum subtractionis*. Ut $a - b$ significat a minus b, hoc est a quantitate a subtractam esse quantitatem b. Sic $5 - 3 = 2$.

$\times$ *Signum multiplicationis*. Sic $a \times b$ significat a multiplicatum in b, vel per b. Ut $3 \times 5 = 15$.

$::$ *Signum proportionum æqualium*. Sic $a.b :: c.d$ denotat eandem esse proportionem inter a & b, quæ est inter c & d. Ut $2.4 :: 3.6$. Item $1.3 :: 9.27$ &c.

$\div\!\!\div$ *Signum proportionis continuæ*. Sic $\div\!\!\div\, a, b, c$, denotat a esse ad b, sicuti b ad c. Ut 2, 4, 8.

AXIO-

AXIOMATA.

I. Unitas se habet ad fractionem, ut denominator ad numeratorem. Sic $1.\frac{2}{3} :: 3.2$. Unitas enim ex dictis est totum divisum, quod se habet ad partem, (quæ est fractio) ut fractionis denominator (qui est totum, quod fuit divisum) ad sui partem, nempe ad numeratorem.

II. Minutiæ, quarum denominatores habent ad suos numeratores eandem rationem, sunt inter se æquales, & valent omnino idem. Sic $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{100}{200}$ &c. sunt fractiones æquales, idemque significant. Quod ex primo *Axiom.*, tum etiam per se patet. Nam singulæ hæ fractiones unius integri medietatem important. Hinc fractorum valor non ex magnitudine numerorum, quibus exprimuntur, sed æstimari debet ex proportione majori, vel minori, quam numerator habet ad suum denominatorem; proinde major est $\frac{1}{2}$, quam $\frac{1}{10}$, vel $\frac{1}{100}$ &c.

III. Minutia, cujus tam numerator, quam denominator per eundem numerum multiplicantur, aut dividuntur, valorem non mutat. Sic multiplicando $\frac{2}{3}$ per 5 oritur $\frac{10}{15}$, quæ idem valet ex 2. *Axiom.* Pariter dividendo $\frac{10}{15}$ per 5 fit $\frac{2}{3}$ ejusdem valoris cum $\frac{10}{15}$. Item divisis $\frac{3}{9}$ per 3, fit $\frac{1}{3}$, quæ idem valet ex 2. *Axiom.*

Schol. *Multum interest, ut tyrones hactenus dicta bene intelligant, priusquam ad fractorum regulas addiscendas procedant, alioquin difficilia illis, & valde obscura erunt, quæ sequuntur.*

F PRO-

PROPOSITIO I.

Datis duobus numeris, maximam eorum communem mensuram invenire.

MEnſura duorum numerorum communis dicitur numerus, qui illos exacte, & ſine reſiduo dividit; ſeu numerus, qui aliquoties ſumptus illos adæquat. Sic 3 dicitur menſura communis numerorum 12 & 21, quia alterum quater, alterum ſepties ſumptus adæquat. Dicitur autem menſura maxima numerus, per quem ſolum duo numeri reducuntur ad numeros primos, ſeu minimos.

I. Dati ſint duo numeri *A* & *B*, quorum menſura communis maxima quæritur. Dividatur major *A* per minorem *B*, & neglecto quoto, notatur reſiduum *C*; deinde *B* dividatur per reſiduum *C*, tum reſiduum *C* per reſiduum *D*, & ſic deinceps, nulla habita exponentium ratione, donec tandem diviſor occurrat *F*, qui præcedentem exacte dividat ſine ullo reſiduo; hic erit maxima communis menſura quæſita.

Exempl. 1.	*A*	234	*Exempl.* 2.	438
	B	144		102
	C	90		30
	D	54		12
	E	36		6
	F	18		0
		0		

II. Quod

II. Quod ſi poſt omnem diviſionem remanet 1, ſignum eſt, nullam reperiri poſſe communem menſuram inter numeros datos, eoſque eſſe inter ſe primos.

Dati ſint numeri *M* & *N*, divide majorem *M* per *N*, & neglecto quoto, nota reſiduum *R*, ac ſic deinceps proſequere; occurrit demum 1, adeoque numeri dati *M* & *N* ſunt inter ſe primi.

Exempl. 1.	*M*	134	*Exempl.* 2.	269
	N	49		147
	R	36		122
	S	13		25
		10		22
		3		3
		1		1

Demonſtr. per ſe manifeſta eſt. Nam per continuam illam numeri minoris a majori ſubtractionem (diviſio enim eſt compendioſa ſubtractio) devenitur tandem ad partem aliquotam, vel aliquantam numerorum datorum. In primo caſu pars illa aliquota erit maxima communis menſura duorum numerorum; in ſecundo caſu evidens eſt, nullum alium numerum, præter unitatem, metiri poſſe numeros datos, adeoque ſunt inter ſe primi (*per defin.* 8.)

SCHOL. *Nota quemlibet numerum ſe ipſum ſemel metiri, proinde dari poteſt menſura communis maxima inter duos numeros, quorum alter ſimplex ſit, ſeu primus, & alter compoſitus. Sic 7 eſt maxima communis menſura inter 7 & 21. Nam utroque diviſo per 7, habetur 1 & 3.*

 Item

Item 5 & 75 divisi per 5, faciunt 1 & 15, adeoque 5 est maxima communis mensura; & sic de aliis.

PROPOSITIO II.

Fractiones ad minimos terminos reducere.

Fractio dicitur ad minimos terminos reduci, cum alia illi æqualis, nempe valoris ejusdem, minimis terminis expressa reperitur.

I. Data sit fractio $\frac{160}{296}$ ad minimos terminos reducenda, quæratur maxima communis mensura inter numeratorem, & denominatorem, per *Propos. præc.* invenietur 8. Per hunc divide tam 160, quam 296, fiet minutia ejusdem valoris, & minimis terminis expressa $\frac{20}{37}$ per *Axiom.* 3.

II. Sit minutia data $\frac{60}{96}$ reducenda ad minimos terminos. Inveniatur maxima communis mensura inter 96, & 60, per *Propos. præc.* erit 12, per quem diviso utroque datæ fractionis termino, habetur nova fractio $\frac{5}{8}$ minimis terminis expressa. Hæc praxis vulgo dicitur *schizare i rotti*.

Demonstratio patet ex 3. *Axiom.*

PROPOSITIO III.

Fractiones ad idem nomen reducere.

Fractiones reducere ad idem nomen, est efficere, ut fractiones diversorum denominatorum eundem denominatorem acquirant, sed idem valeant, quod prius.

I. Sint

I. Sint duæ fractiones *A* & *B* ad commune nomen reducendæ. Duc inter se ad invicem denominatores 5 X 4, & 4 X 5, erit denominator communis 20. Pro numeratoribus inveniendis multiplica per crucem, seu decussatim, numeratorem unius minutiæ per denominatorem alterius, hoc est 2 X 4, & 3 X 5, erunt novi numeratores 8 & 15, qui directe collocandi sunt sub illa minutia, cujus numerator fuit multiplicatus, ut in sequentibus duobus exemplis apparet. Habentur ergo duæ novæ fractiones *C* & *D* ejusdem nominis, ut patet, & quidem valoris ejusdem per 3. *Axiom.*

Nam termini fractionis *A* multiplicantur per eundem numerum, hoc est per 4 denominatorem fractionis *B*; unde oritur fractio *C* priori æqualis per *Axioma cit.* Similiter termini fractionis *B* multiplicantur per 5 denominatorem fractionis *A*, & oritur fractio *D* priori æqualis per idem *Axiom.* ergo fractiones *C* & *D* idem valent ac duæ priores.

A	$\frac{2}{5}$ X $\frac{3}{4}$	*B*		$\frac{1}{6}$ X $\frac{10}{15}$		
C	$\frac{8}{20}$	$\frac{15}{20}$	*D*	$\frac{15}{90}$	$\frac{60}{90}$	

II. Quod si reducendæ sint ad idem nomen plures quam duæ fractiones, ut *A*, *B*, *C* &c. duc omnes denominatores inter se 3 X 4 X 5 fiet *F* communis denominator 60, qui divisibilis est per singulos denominatores 3, 4, 5, ut patet.

Ad inveniendos itaque novos numeratores, divide communem denominatorem 60 per 3 denominatorem fractionis *A*, quotus est 20, tertia scilicet denominatoris

toris communis pars, quem duc in numeratorem 2, habebis 40 duas tertias partes ipsius 60, adeoque $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ per *Axioma* 2.

Similiter diviso 60 communi denominatore per denominatorem 4 fractionis *B*, habetur 15 quarta pars ipsius 60. Duc 15 in 3, habebis 45 tres quartas partes ejusdem 60, adeoque $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ per *Ax.* 2. Eadem ratione invenitur $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$. Proinde fractiones datæ *A*, *B*, *C*, æquales sunt fractionibus *M*, *N*, *R*; quod per se manifestum est.

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \frac{2}{3} \times & \frac{3}{4} \times & \frac{1}{5} = 60\ F \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M & N & R \\ \frac{40}{60} & \frac{45}{60} & \frac{12}{60} \end{array}$$

Coroll. Ex hac Propos. innotescit, utra duarum, vel plurium fractionum datarum sit major. Nam si reducantur ad idem nomen, ex majori numeratore apparet, quæ sit major. Sic in superiori exemplo fractio *B* est ceterarum maxima, quod indicat numerator fractionis *N*.

Schol. *Cum denominator unius fractionis exacte dividit denominatorem alterius, tunc duæ illæ fractiones facile reducuntur ad idem nomen, multiplicando per illum quotum terminos fractionis illius, cujus denominator fuit divisor. Sint reducendæ ad idem nomen fractiones* $\frac{2}{3}$ *&* $\frac{7}{15}$, *quia* 3 *dividit exacte* 15, *multiplica per quotum* 5 *terminos fractionis* $\frac{2}{3}$, *oritur* $\frac{10}{15}$ *ejusdem nominis cum alia fractione. Quod est valde commodum in Calculis Algebraicis, ut in nostris* Instit. Analyt. *annotavimus.* PRO-

PROPOSITIO IV.

Fractionem ad aliam dati nominis, & ejusdem valoris revocare.

I. Data sit fractio $\frac{2}{3}$, quæ revocari debeat in aliam, cujus denominator datus sit 60. Duc numeratorem 2×60, & productum 120 divide per denominatorem 3, quotus 40 erit numerator minutiæ quæsitæ $\frac{40}{60}$, quæ quidem est ejusdem valoris cum minutia data per *Axioma* 2. nam 3 . 2 : : 60 . 40. ut patet.

II. Quod si datæ fractionis denominator non exacte dividit productum, ut si $\frac{2}{3}$ reduci debeant ad fractum, cujus denominator est 8, productum 16, quod oritur ex 2 × 8, non exacte dividitur per denominatorem 3, nam remanet 1: tunc ponatur quotus 5 supra denominatorem datum 8, eique jungatur fractio orta ex residuo, nempe $\frac{1}{3}$, quæ erit fractionis fractio; & facit hunc sensum, duæ tertiæ in octavas redactæ dant quinque octavas, & unam tertiam quinque octavarum, scilicet $\frac{2}{3} = \frac{5}{8} + \frac{1}{3}$. Quod autem $\frac{2}{3}$ idem valeant ac $\frac{5}{8} + \frac{1}{3}$, patet ex 2. *Axiom.* Nam 3 . 2 : : 8 . 5 + $\frac{1}{3}$. hoc est 3 . 2 : : 24 . 16.

Schol. *Hinc habetur ratio explorandi valorem minutiarum in partibus earum notioribus; ut si scire velis quid valeant* $\frac{3}{5}$ *unius scuti Romani in juliis, vel assibus. Quia* 10 *julii, aut asses* 100 *efficiunt scutum Romanum* 1, *duc numeratorem* 3 *in* 10, *aut in* 100, *& productum divide per denominatorem* 5, *erunt in primo casu* $\frac{6}{10}$, *in secundo* $\frac{60}{100}$, *hoc est julii sex, aut asses* 60. *Item dantur* $\frac{3}{7}$ *unius*

unius pedis, scire volo quot pollices hæc fractio importet. Quia pollices 12 pedem 1 efficiunt, duco 3×12, *& productum 36 divido per 7, quotus dat 5, unde habentur* $\frac{5}{12}$ *hoc est pollices 5, & remanet* $\frac{1}{7}$. *Quod si iterum supponas pollicem dividi in 12 lineas, facile erit explorare, quid importet una septima pars unius pollicis. Hæc praxis vulgo dicitur* valutare i Rotti.

PROPOSITIO V.

Fractiones ad integra revocare.

I. CUM numerator denominatore suo major est, fractio reducitur ad integra, dividendo numeratorem per denominatorem. Sic $\frac{12}{3}$ divisæ per 3 dant integra 4. Item $\frac{60}{12}$ divisæ per 12 dant 5 integra.

II. Quod si denominator non exacte dividit numeratorem, fit ex residuo minutia. Proinde $\frac{17}{3}$ divisæ per 3 dant integra $5\frac{2}{3}$. Similiter $\frac{22}{7}$ divisæ per 7 dant $3\frac{1}{7}$.

SCHOL. *Hinc habetur praxis reducendi monetas, pondera, ac mensuras in alias speciei altioris. Sic asses 350 si dividantur per 100, reducuntur ad scuta Romana* $3\frac{50}{100}$, *seu* $3\frac{1}{2}$. *Pariter minuta 120 divisa per 60, dant horas 2. Patet divisores istos 100, & 60 esse denominatores minutiarum, per quos earum numeratores dividuntur per hanc Propositionem.*

PRO-

PROPOSITIO VI.

Numerum integrum in minutiam dati nominis reducere.

SIT datus integer v. gr. 3 reducendus in fractum, cujus denominator sit 7. Multiplica integrum ipsum 3 per denominatorem datum 7, & producto subscribe ipsum denominatorem 7, erit fractio quæsita $\frac{21}{7}$. Similiter unitas reducenda sit in fractum, cujus denominator sit 5, erit $\frac{5}{5} = 1$ ex dictis ad *definit. 1. Cap. hujus.*

SCHOL. I. *Si integro cuilibet supponatur unitas, fit fractio; vel quasi fractio integro æquivalens, ut* $\frac{6}{1} = 6$, $\frac{8}{1} = 8$ *&c. quod pro multiplicatione, & divisione fractorum annotetur.*

SCHOL. II. *Hinc vero oritur praxis reducendi monetas, pondera, ac mensuras in alias inferioris speciei. Sint scuta Romana 55 reducenda ad asses, multiplica* 55×100, *habebis asses 5500. Item milliaria Romana 50 convertenda sint in passus, quia passus 1000 milliare 1 efficiunt, duc* 50×1000, *fient passus 50000. Patet in his exemplis numeros illos 100, & 1000 esse denominatores datos, per quos multiplicantur numeri integri 55, & 50, ut fiant fractiones* $\frac{5500}{100}$, $\frac{50000}{1000}$ *juxta hanc* Propos.

 PRO-

PROPOSITIO VII.

Fractionem fractionis ad simplicem fractionem reducere.

Duæ, vel plures fractiones fractionum ad unam simplicem fractionem reducuntur hoc pacto. Multiplica singulos numeratores inter se, & singulos pariter denominatores inter se, duo producta minutiam efficient æqualem omnibus illis minutiis minutiarum datis. Sit minutia minutiæ $\frac{1}{4}$) $\frac{2}{3}$) hoc est una quarta pars duarum tertiarum ad simplicem minutiam reducenda, duc inter se numeratores 1×2, & denominatores 4×3, erit nova quæsita minutia $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Similiter reducendæ sint ad simplicem minutiæ minutiarum $\frac{3}{4}$) $\frac{2}{3}$) $\frac{3}{5}$, multiplicatis inter se $3 \times 2 \times 3$, item $4 \times 3 \times 5$, habetur nova minutia omnibus illis æqualis $\frac{18}{60} = \frac{3}{10}$ per *Prop.* 2. hujus.

Demonstr. sensibili aliquo exemplo res manifesta erit. Ponamus hanc ipsam minutiam minutiarum $\frac{3}{4}$) $\frac{2}{3}$) $\frac{3}{5}$ desumptam fuisse ex uno scuto Romano, quod decem juliis constat; dico hanc minutiam minutiarum continere $\frac{3}{10}$ unius scuti, nempe tres julios. Nam $\frac{3}{5}$ unius scuti continent sex julios, cum julii duo sint $\frac{1}{5}$ unius scuti. At $\frac{2}{3}$ sex juliorum sunt quatuor julii, ut patet, & $\frac{3}{4}$ quatuor juliorum sunt tres julii. Ergo evidens est, minutiam minutiarum $\frac{3}{4}$) $\frac{2}{3}$) $\frac{3}{5}$ continere $\frac{3}{10}$, nempe tres julios.

Id facile illustrari potest dividendo lineam rectam in partes æquales tres, quatuor &c. Nam si quæratur dimidium unius tertiæ partis ejusdem lineæ, patet illam esse partem sextam totius. Divisis enim bifariam singulis illis tertiis ejus lineæ partibus, erit tota linea divisa in sex partes æquales; proinde $\frac{1}{2}$ unius tertiæ facit $\frac{1}{6}$. Quod erat &c.

Hæc regula apud vulgares Arithmeticos audit *infilzare i Rotti*.

PROPOSITIO VIII.

Fractiones addere.

I. Si fractiones addendæ sint ejusdem nominis, adde simul omnes numeratores, eorumque aggregato denominatorem subscribe. Sint addendæ $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ additis numeratoribus $1 + 2 + 5 + 6 = 14$, fit fractionum summa $\frac{14}{7} = 2$ per *Propos.* 5. hujus.

II. Si fractiones addendæ sint diversi nominis, reduc ad idem nomen per *Propos.* 3. & operare, ut dictum est.

III. Quod si addendi sunt integri cum fractis, adde seorsim integros, & seorsim fractos; ut si ad $4\frac{2}{5}$ addendi sint $3\frac{1}{5}$, fiet summa $7\frac{3}{5}$. Res per se patet.

PROPOSITIO IX.

Fractiones subtrahere.

I. Si minutiæ sunt ejusdem nominis, minor earum ex majori subducitur, & residuo subscribitur communis denominator. Sic $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$. Item $\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$.

II. Si diverſi ſint nominis, reducantur ad idem nomen per *Propoſ.* 3., & operatio fit ut antea.

III. Si ab integris ſubtrahenda ſit aliqua fractio, reducantur integra ad fractionem ejuſdem nominis cum data fractione per *Propoſ.* 6., & cetera fiant, ut ſupra. Subtrahere oporteat $\frac{2}{3}$ ex 4, reduc 4 ad tertias, erunt $\frac{12}{3}$. Deinde $\frac{12}{3} - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\,\frac{1}{3}$ per *Propoſ.* 5. Similiter ſubtrahenda ſint $2\,\frac{1}{4}$ ex $5\,\frac{1}{2}$, hoc eſt $\frac{9}{4}$ ex $\frac{11}{2}$: reduc ad idem nomen has duas fractiones per *Propoſ.* 3. erunt $\frac{22}{4}$, & $\frac{9}{4}$, adeoque $\frac{22}{4} - \frac{9}{4} = \frac{13}{4} = 3\,\frac{1}{4}$, per *Propoſ.* 5.

SCHOL. *Ut minutiæ addi, vel ſubtrahi valeant, ſemper idem nomen habere debent, quod notetur.*

PROPOSITIO X.

Fractiones multiplicare.

I. SI multiplicanda eſt fractio per fractionem, duc inter ſe numeratores, itemque denominatores inter ſe, res erit confecta. Multiplicanda ſit fractio $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$ ductis 2×2, & 3×5, habetur productum quæſitum $\frac{4}{15}$. Sic $\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ per *Propoſ.* 2.

II. Quod ſi multiplicandus ſit integer per fractum, vel fractus per integrum, ſemper integro ſuppone unitatem, ut fiat quaſi fractio; deinde operare ut ſupra. Sit multiplicanda $\frac{2}{3} \times 7$, ſuppoſita integro unitate, erit $\frac{2}{3} \times \frac{7}{1}$, proinde productum $\frac{14}{3}$.

III. Si vero alter multiplicantium ſit integer cum fracto, reducatur totus ad fractum, multiplicando illum per denominatorem ejuſdem fracti; ut ſi multiplicari oporteat $2\,\frac{1}{5}$ per 6, fiat $\frac{11}{5} \times \frac{6}{1}$; erit productum $\frac{66}{5}$. Similiter ſi uterque multiplicator ſit integer cum fracto, uterque reducitur ad fractum ejuſdem nominis cum minutia ſibi adhærente: ut ſint multiplicanda $3\,\frac{1}{7} \times 5\,\frac{1}{3}$, reducantur ad fractos, erunt $\frac{22}{7} \times \frac{16}{3} = \frac{352}{21} = 16\,\frac{16}{21}$ per *Propoſ.* 5.

Demonſtr. Ex regula tradita multiplicare fractum *A* per fractum *B* eſt producere fractum *C*, qui toties contineatur in fracto *B*, quoties fractus *A* continetur in unitate. Nam ſicuti fractus *C* continetur bis in fracto *B*, ita fractus *A* bis continetur in unitate, ut patet; ergo ex definitione multiplicationis fractus *C* eſt productum fracti *A* multiplicati per fractum *B*.

$$A\ \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{5}\ B \qquad \tfrac{3}{10}\ C$$

COROLL. Hinc patet ratio, quare in minutiis productum multiplicationis *C* ſit minus, quam factores *A* & *B*. Nam cum unitas ſit ad *A*, ut *B* ad *C* ex *defin.* multiplicationis *per Prop.* 5. *Cap.* I.; & unitas major ſit quam *A*, etiam *B* major erit quam C, proinde C minor.

SCHOL. I. *Multiplicatio fractionum fit etiam eleganter per diviſionem, dividendo ſcilicet denominatorem unius per numeratorem alterius minutiæ (modo diviſibiles ſint ſine reſiduo) ſint enim mulliplicanda* $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10}$, *divide* 9 *per* 3, & 10 *per* 2, *fit* $\frac{3}{5}$ *productum quæſitum. Idem enim producitur, ac ſi more conſueto multiplicentur. Nam* $\frac{2 \times 9}{3 \times 10} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ per *Propoſ.* 2.

SCHOL. II. *Si integrum cum minutia ducendum ſit in integrum, quod exacte diviſibile ſit per denominatorem minutiæ, ut ſi ducendum ſit* $38\,\frac{2}{3} \times 18$, *practici*

prima

primo resolvunt integrum in fractum, fitque 116, *deinde diviso* 18 *per denominatorem* 3, *habetur quotus* 6, *per quem multiplicant ipsum* 116, *& habetur productum quæsitum* 696. *Ratio per se patet.*

PROPOSITIO XI.

Fractiones dividere.

I. SI termini divisoris exacte dividant terminos dividendi, fractus, qui inde oritur, erit quotus. Ut si dividenda sit minutia $\frac{4}{9}$ per $\frac{2}{3}$, divisis 4 per 2, & 9 per 3, quotus erit $\frac{2}{3}$. Similiter si denominator sit communis, satis erit dividere numeratorem per numeratorem; sic dividendo $\frac{6}{7}$ per $\frac{2}{7}$, quotus erit $\frac{3}{1}$.

II. Quod si termini divisoris non exacte dividant terminos dividendi, inverte divisorem, ita ut denominator ponatur loco numeratoris, numerator vero loco denominatoris, deinde duc tam numeratores inter se, quam denominatores inter se, productum erit quotus quæsitus. Dividenda sit minutia $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$, inverso divisore, erit $\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ quotus quæsitus. Sic $\frac{4}{7}$ divisa per $\frac{3}{5}$, inverso divisore, erit $\frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{21}$ quotus.

III. Quoties occurrit fractus dividendus per integrum, satis est multiplicare denominatorem fracti per ipsum integrum. Sit dividendus $\frac{1}{5}$ per 2, duc 5×2, quotus erit $\frac{1}{10}$. Item $\frac{1}{3}$ divisus per 5, dat quotum $\frac{1}{15}$. Nam semper integro supponitur unitas.

IV. Cum divisor, aut dividendus, vel uterque est integer cum minutia, reducendus est integer ad minutiam sibi adjunctam, ut fiat unica minutia, & operatio instituenda est, ut supra. Sint dividenda $24\frac{1}{5}$ per $\frac{2}{3}$, fient $\frac{121}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{363}{10} = 36\frac{3}{10}$ *per Prop.* 5. Similiter sint dividenda $15\frac{1}{3}$ per $12\frac{1}{2}$, fiunt $\frac{46}{3} \times \frac{25}{2} = \frac{92}{75} = 1\frac{17}{75}$.

Demonstr. Dividere fractum *A* per fractum *B* est invenire quotum *C*, ad quem ita sit unitas, sicuti divisor *B* ad dividendum *A* ex divisionis definitione *per Prop.* 6. *Cap.* 1. Sed unitas est ad fractum *C*, ut divisor *B* ad dividendum *A*. Unitas enim est ad *C*, ut denominator 3 ad numeratorem 4 ex *Axiom.* 1. Fractus autem *B* est ad fractum *A*, ut 3 ad 4: nam redactis ad idem nomen *A* & *B* per *Prop.* 3. oriuntur fracti æquales *M* & *N*, qui ob communem denominatorem se habent ut 3 ad 4; ergo unitas est ad *C*, ut *B* ad *A*; proinde *C* est quotus quæsitus. Quod &c.

B	*A*	*C*	
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	
M	*N*		$1 . \frac{4}{3} :: 3 . 4$
$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$		

COROLL. Hinc patet ratio, cur in divisione minutiarum quotus sit major numero ipso, qui dividitur; quod quidem accidit, cum divisor minor est unitate. Nam cum divisor sit ad dividendum, ut unitas ad quotum, erit permutando divisor ad unitatem; ut dividendus ad quotum, adeoque si divisor minor est unitate, etiam dividendus debet esse minor quoto.

SCHOL. I. *Ubi occurrit integer magnus cum fracto dividendus per integrum, ut* $634\frac{2}{3}$ *per* 5, *practici dividunt*

dunt integrum per integrum, nempe 634 per 5, nulla habita ratione fractionis; ut inveniant quotum 126. *Tum si quid remanet (ut hic* 4) *illud reducunt ad fractionem* per Prop. 6., *hoc est ad ad* $\frac{12}{3}$, *quam ad fractum* $\frac{2}{3}$ *addunt; fitque summa* $\frac{14}{3}$ *per* Propos. 8., *quae quidem summa divisa per* 5 *dat quotum* $\frac{14}{15}$ *per hanc* Propos. n. 3 *unde quotus quaesitus est* 126 $\frac{14}{15}$.

Schol. II. *Esset hic agendum de fractionibus decimalibus, earumque calculo, quae quidem in rebus praesertim Geometricis magno sunt usui. Sed nos de illis in nostris Institutionibus Analyticis satis luculenter agimus, neque actum agere volumus.*

CAPUT IV.

De Extractione Radicum.

Si numerus quicunque ducatur in se ipsum, ut 3 X 3, producitur 9, qui dicitur numerus quadratus, propter analogiam, quam dicit ad quadratum Geometricum. Item si ducas 4 X 4, oritur 16 pariter quadratus. Illi vero numeri 3 & 4, ex quibus in se ductis planum illud, seu quadratum oritur, dicuntur *radix*, seu *latus* quadrati.

Si radix 3 multiplicet quadratum 9, vel 4 multiplicet 16, tunc producitur 27, vel 64, qui dicuntur *cubi*; quia repraesentant corpus aequaliter longum, latum, & profundum, quod a Geometris denominatur *cubus*,

cubus, & numeri illi 3, & 4 dicuntur *radix*, seu *latus* cuborum 27, & 64.

Quod si cubus ipse per suam radicem multiplicetur, ut 27 X 3, oritur *quadrato-quadratus* 81. Si iterum 81 X 3, oritur *quadrato-cubus*, & sic deinceps.

Haec producta recentiores Mathematici vocant *dignitates*, seu *potestates*; ita ut dicatur ex priori exemplo,

3. *Radix*, seu potestas prima.
9. *Quadratum*, seu potestas secunda.
27. *Cubus*, seu potestas tertia.
81. *Quadrato-quadratum*, seu potestas quarta.
243. *Quadrato-cubus*, seu potestas quinta.

Extractio igitur radicis quadratae, vel cubicae &c. (seu secundae, tertiae, vel quartae potestatis &c.) est inventio illius numeri, qui semel, bis, ter, vel pluries in se ductus, illam potestatem genuit, adeoque ab ipsa potestate denominatur radix secunda, tertia, quarta &c. Hoc problema ingentem usum habet in universa fere Mathesi, proinde expedit, ut tyrones in eo diligenter instruantur.

PROPOSITIO I.

Ex dato numero radicem quadratam, seu secundam extrahere.

I. Si numerus datus centenarium non excedit, & sit quadratus, ejus radix habetur ex tabella inferius posita; ut si quaeratur radix quadrati 64, ejus radix

dix invenitur 8. Quod ſi numerus non ſit quadratus, ut ex. gr. 50, ſumenda eſt ex eadem tabella radix proxime minor, hoc eſt 7, quæ in ſe ducta producit 49, quadratum maximum contentum in dato numero 50.

Radices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

II. Sit numerus A, ex quo radix ſecunda extrahenda ſit. 1. Sub ultima figura ad dexteram notetur punctum, deinde ſub antepenultima, & ſic deinceps, ut totus numerus diſtribuatur in membra (ut hic tria) quæ continebunt binas figuras, excepto ultimo ad ſiniſtram, ſi numerus figurarum ſit impar, quod unam habebit. Quot erunt membra, tot figuris radix quæſita conſtabit.

2. Quære ex tabula ſuperiori radicem primi membri ad ſiniſtram, nempe 18, hoc eſt radicem proxime minorem ex dictis num. 1. ſcilicet 4, quam pone dextrorſum poſt lineam, ut in B.

3. Duc radicem 4 in ſe ipſam, & quadratum 16 pone ſub ipſo membro 18, ex quo ſubtrahatur; tum reſiduo 2 (quod notatur infra lineam) adde ſequentes duas figuras 66, quæ ſimul faciunt 266.

4. Radicem ipſam 4 duplica, fit 8, quem pone in C pro diviſore numeri 26 (excluditur enim ſemper a diviſione figura notata puncto) & quotum inventum 3 appone tum radici in B, tum diviſori in C, unde fit 83.

5. Per radicem modo inventam 3 multiplica omnes nume-

numeros in C poſitos, & productum 249 ſubſcribe numero 266; a quo facta ſubtractione, remanent 17.

6. Adde huic reſiduo ſequentes duas figuras 24, fient 1724; eandemque operationem rurſus inſtitue: nimirum duplica totam radicem B, habebis 86, quem pone in D pro diviſore numeri 172 (excluſa figura ultima) quotus erit 2, quem appone tum radici in B, tum diviſori in D, & per ipſam radicem 2 multiplica numeros omnes in D 862. Deinde productum 1724 ſubſcribe ipſi numero 1724, a quo debet ſubtrahi; cumque nihil remaneat, ſignum eſt, datum numerum eſſe vere quadratum.

A 186624 (B 432

16

C 83) -266

249

D 862) -1724

1724

0000

Sit aliud exemplum. Extrahenda eſt radix quadrata ex dato numero M 6015625.

1. Dividatur in membra per puncta, incipiendo dextrorſum modo jam explicato. Sunt quatuor membra, quorum primum ad ſiniſtram continet unam figuram tantum 6. Hujus radix proxime minor eſt 2, quam pone in N dextrorſus, ejuſque quadratum 4 ſubtrahe ex pri-

primo membro 6, remanent 2, quibus adde duas figuras ſequentis membri, nempe 01, fiunt 201.

2. Duplica radicem 2, & per ejus duplum 4, quod pone dextrorſum in *R*, divide 201 (relicta ſemper ultima figura notata puncto) quotus eſt 5, qui reponi deberet tum in *N*, tum in *R*, & per ipſum multiplicari numeri in *R*, nempe 45; ſed quia 45 x 5 producit 225, quod ſubtrahi nequit ex numero 201, ut patet, proinde quotus 5 minuitur unitate, & ponitur tam in *N*, quam in *R* quotus 4, qui ductus in 44, producit 176, quod ſubtractum ex 201 relinquit 25.

3. Adde huic reſiduo duas ſequentes figuras 56, efficiunt 2556. Repetenda eſt eadem operatio toties, quot reſtant membra in dato numero. Nimirum duplicanda eſt radix 24, & per ejus duplum 48, quod ponitur dextrorſum in *Q*, dividenda ſunt 255 (relicta ultima figura) quotus 5 eſt nova radicis figura, quæ ponitur in *N*, tum etiam in *Q*, & per ipſam multiplicando omnes figuras in *Q* exiſtentes, habetur productum 2425 ſubtrahendum ex 2556, factaque ſubtractione, habetur reſiduum 131. Cui adde ultimas duas figuras 25, & operare ut ſupra, invenies ultimam radicis figuram 2, quam pone in *N* & *S*, ac cetera proſequere, ut ſæpius dictum eſt.

Eſt igitur radix quæſita *N* 2452, & remanet 3321, adeoque numerus datus non eſt revera quadratus.

COROLL. Hinc patet, radicem inventam per diviſionem, unitate eſſe minuendam, ſi productum, quod fit ex multiplicatione, majus ſit numero, a quo ſubtrahi debet; ut in ſecunda figura radicis inventæ factum eſt; quod quidem notetur.

M

$$\begin{array}{lr l}
 & M\ \dot{6}0\dot{1}5\dot{6}2\dot{5} & \left(\begin{array}{l}N\\ 2452\end{array}\right. \\
 & 4 & \\
R\ 44) & 201 & \\
 & 176 & \\
Q\ 485) & -2556 & \\
 & 2425 & \\
S\ 4902) & -13125 & \\
 & 9804 & \\
 & 3321 &
\end{array}$$

SCHOL. I. *Quando diviſor non continetur in aliquo membro dividendo, apponitur in radice cyphra, ſeu zero, ut ſi extrahenda ſit radix quadrata ex* 3714. *Quia ſublato ex primo membro* 37 *quadrato* 36 *radicis inventæ* 6, *remanet* 1, *cui ſi addatur ſequens figura* 1 *fit* 11. (*nam figura puncto notata excluditur a dividendo ex dictis*) *qui numerus dividi nequit per duplum radicis* 6, *nempe* 12; *in hoc caſu ponitur in radice cyphra* 0, *eritque radix* 60, *& habetur reſiduum* 114, *cui adduntur ſtatim* (*ſi ſint*) *aliæ duæ figuræ dati numeri*.

SCHOL. II. *Si numerus datus non eſt quadratus, ſed remanet reſiduum, ut in allato exemplo reſiduum* 114; *tunc fit ex reſiduo fractio, in qua reſiduum ipſum ponitur pro numeratore, pro denominatore autem duplum radicis inventæ. Si vero reſiduum ſit majus ipſa radice, tunc duplo radicis inventæ additur unitas. Sic in eodem exemplo, quia reſiduum* 114 *majus eſt tota radice* 60,

addi-

addita unitate ad duplum ipsius radicis, erit fractio $\frac{114}{121}$, *ac tota radix* $60 + \frac{114}{121}$.

SCHOL. III. *Nullus numerus erit quadratus, qui habeat ad dexteram figuram ultimam* 2, *vel* 3, *vel* 7, *vel* 8, *vel cyphram unam; sed necesse est, ut sit una ex his* 1, 4, 5, 6, 9, 00, *quibus constant numeri simplices quadrati.*

SCHOL. IV. *Extractio radicis quadratæ non est aliud nisi quædam divisionis species, ut ex ipsa operatione manifestum est; hoc tamen discrimine, quod in divisione communi divisor est numerus datus, in hac vero debet inquiri divisor, & quidem per plures partes, quæ sunt ipsa radix. Proinde multiplicando radicem per se ipsam, v.g. in primo exemplo* 432 X 432, *restituitur numerus quadratus* 186624, *ut fieri solet in divisione communi, ducendo quotum per divisorem. Et hac ratione habetur examen, multiplicando scilicet per se ipsam radicem inventam.*

Demonstr. pendet a *Prop.* 4. *lib.* 2. *Eucl.* Nam numerus quadratus 186624, qui producitur ex 432 X 432, continet primo quadrata partium 4, 3, 2. Secundo, bis rectangulum 4 X 3. Tertio, bis rectangulum ex 43 X 2, seu rectangulum ex duplo ipsius 43, nempe 86 X 2; quod patet ad oculum, nempe:

```
1 6 . . . .
  1 2 . . .
  1 2,9 . .
      8 6 .
      8 6,4
-----------
1 8 6 6 2 4
```

Ex

Ex speciosa tamen id longe clarius apparet, si loco numerorum 4, 3, 2, sumantur literæ $a + b + c$; ut in nostris *Instit. Analyt.* videre est.

PROPOSITIO II.

Radicem quadratam per approximationem inquirere.

EXtracta radice quadrata, si quid remanet, signum est, talem numerum non esse revera quadratum, neque habere radicem rationalem, quæ numeris exprimi possit. Quamvis autem vera radix sit impossibilis, potest tamen per fractiones decimales ad veram radicem magis magisque approximari, ita ut excessus, vel defectus a vera radice sit minimus. En praxis.

Adde numero, qui remanet post extractionem radicis, tot cyphrarum paria, quot volueris, nempe 00, seu 0000, vel 000000 &c. & ex numero residuo una cum prædictis cyphris extrahe radicem secundam, ut moris est. Aufer deinde ex radice tot figuras (a dextera incipiendo) quot fuerunt paria cyphrarum additarum. Reliquæ figuræ radicis exhibebunt radicem una cum minutia, cujus numerator erunt figuræ ablatæ, denominator vero unitas cum tot cyphris, quot paria fuerunt addita.

Sit exemplum. Extrahenda est radix ex numero 12, patet radicem esse 3, & remanere 3. Adde ipsi 12 tria cyphrarum paria, erit 12000000. Extracta ex hoc numero secunda radix *per Prop.* 1. *hujus* invenitur 3464, ex qua ablatis ad dexteram tribus figuris, ob tria cyphraphrarum paria addita, erit radix $3\frac{464}{1000}$ vera quidem minor, sed propinquior, & exactior, quam radix primo inventa.

Schol. I. *Si numero, ex quo radix secunda extrahitur, minutia adhæreat, reducitur minutia in partes centesimas, & extrahitur radix. Extrahenda sit radix ex $6\frac{1}{4}$, reduc fractionem in centesimas per regulam proportionum (de qua inferius) dicendo, ut 4. 1 :: 100. 25, erit igitur fractio $\frac{25}{100}$, cui adde 6, fit $\frac{625}{100}$, cujus radix quadrata erit $2\frac{5}{10}$.*

Schol. II. *Quod si extrahenda sit radix ex meris fractionibus, extrahitur radix de more, sed seorsim ex numeratore, & seorsim ex denominatore. Sic radix quadrata fractionis $\frac{4}{9}$ erit $\frac{2}{3}$. Similiter radix fractionis $\frac{36}{100}$ erit $\frac{6}{10}$.*

Schol. III. *Via autem omnium expeditissima ad inveniendam radicem quadratam dati numeri maxime propinquam, habetur per Logarithmos.*

PROPOSITIO III.

Ex dato numero radicem cubicam extrahere.

1. Divide numerum datum *A* in membra, incipiendo dextrorsum, ita ut singula membra contineant tres figuras, excepto primo membro, quod aliquando duas tantum continet. Quot erunt membra, tot erunt numeri radicis inveniendæ.

2. Quære radicem cubicam primi membri sinistrorsum, si sit numerus cubicus; sin minus, sume radicem

cubi proxime minoris in tabella *Propos.* 1. *hujus*, quæ in hoc exemplo est 2, quam pone ad dexteram, ut in *B*.

2. Ex hac radice fiat cubus 8, quem subtrahe ex primo membro 12, & residuum 4 scribe infra lineam, ut in *C*.

3. Ad hunc residuum adde unam sequentis membri figuram, nempe 1, fit 41, quem divide per triplum quadrati radicis inventæ, nempe per 12, quotus 3 erit altera radicis figura, quam pone in *B*.

4. Ex radice 23 fac cubum 12167, qui subtrahi debet ex utroque membro numeri *A*. Cumque nihil remaneat, signum est, numerum datum esse revera cubum.

$$
\begin{array}{rcl}
 & A\ 12,167 & (B \\
 & 8 & 23 \\
\hline
12) & C\ 41 &
\end{array}
$$

Hæc operatio toties repeti debet, quot sunt membra numeri dati, ut in sequenti exemplo erit manifestum.

Sit aliud exemplum. Esto numerus *M* 11390625, cujus radix cubica quæritur.

1. Radix cubica primi membri 11 est 2, quam pone in *N*, ejusque cubum 8 subtrahe ex 11, remanet 3, quem scribe infra lineam in *R*.

2. Adde residuo *R* sequentem alterius membri figuram 3, fit 33, quem divide per triplum quadrati radicis inventæ 2, hoc est per 12, quotus 2 erit secunda figura radicis, quam pone in *N*.

3. Ex radice 22 fiat cubus 10648, qui auferatur ex numero *S* 11390, nempe ex duobus membris numeri dati *M*, remanent 742, ut in *T*.

4. Ad hoc residuum T addatur ex tertio membro numeri M figura 6, fiet 7426, qui divisus per triplum quadrati radicis inventæ 22, hoc est per 1452, dat quotum 5, qui ponatur in N, eritque tertia radicis figura.

5. Demum fiat cubus ex tota radice 225, nempe 11390625, qui ablatus ex numero M nihil relinquit, proinde numerus datus est cubus.

$$\begin{array}{rrl} & M & 11,390,625 \quad \left(\begin{array}{l} N \\ 225 \end{array} \right. \\ & & 8 \\ \hline 12) & R & 33 \\ & S & 11390 \\ & & 10648 \\ \hline 1452) & T & -742,6 \end{array}$$

Ratio autem pendet ab ipsa cuborum genesi. Nam in priori exemplo cubus 12167, qui oritur ex radice 23, continet primo cubos 8 & 27, partium 2 & 3. Secundo triplum quadrati radicis 2×3. Tertio triplum quadrati radicis 3×2, hoc est

$$\begin{array}{r} 8\,.\,.\,. \\ 36\,.\,. \\ 54\,. \\ 27 \\ \hline 12167 \end{array}$$

Coroll. Hæc praxis omnium facillima, traditur a Newtono in *Aritbmet. Univ.*, & tribus paucissimis continetur: 1. Ad residuum, quod oritur ex subtractione cubi ex unoquoque numeri dati mẽbro, additur una tantum sequentis

tis membri figura. 2. Diviso illo residuo una cum figura adjecta per triplum quadrati inventæ radicis, quotus dat alterius membri radicem. 3. Ex numeris radicalibus (quotquot illi sint) fit cubus, qui subtrahitur ex totidem membris numeri dati, quot sunt ipsi numeri radicales inventi. Quæ quidem ex allatis exemplis satis patent.

Schol. I. *Cum aliquid remanet, signum est, numerum datum non esse exacte cubicum, ac proinde radicem inventam non esse numeri dati, sed maximi cubi in eo contenti.*

Schol. II. *Si quis propinquiorem radicem, & quæ a vera insensibiliter differat, cupit, addat aliquot cyphrarum ternarios ad ipsum numerum datum, & prosequatur radicis extractionem. Deinde ex radice inventa abjiciantur ad dexteram tot figuræ, quot cyphrarum ternarii fuerunt adjecti; reliquæ enim figuræ dabunt radicem integram cum fractione, cujus numerator erunt ipsæ figuræ rejectæ, denominator vero unitas cum tot cyphris, quot ternarii cyphrarum fuerunt additi, eo fere modo, quo de radice quadrata diximus.*

Schol. III. *Ceterum tam cubica, quam aliæ superiorum potestatum radices, longe facilius per Algebram expediuntur, maxime per formulas Newtonianas, quæ generales sunt, & ad omnem radicem extrahendam valde faciles, & expeditæ. Proinde hunc fontem adeant, qui rem funditus percipere cupiunt.*

Examen habetur ter ducendo in semet radicem cubicam inventam, & addendo illi residuum, si quod fuit. Restituitur enim cubus, seu numerus datus, si erratum non fuerit.

CAPUT V.

De Regulis Arithmeticis.

Regulæ Arithmeticæ sunt quatuor. 1. Est regula Proportionum. 2. Societatis. 3. Alligationis. 4. Positionis, vel falsi. Prima est omnium præcipua, & a qua reliquæ omnes pendent. Quo melius ea intelligatur, nonnulla sunt, de numeris proportionalibus, eorumque proprietatibus præmittenda.

DEFINITIONES.

I. Duæ proportiones dicuntur *similes*, *eædem*, vel *æquales* (quod idem est) cum antecedens unius toties continet suum consequentem, quoties antecedens alterius continet suum consequentem. Vel cum consequens unius toties continetur in suo antecedenti, quoties consequens alterius continetur in suo antecedenti. Sic 12.4 :: 3.1. sunt proportiones similes, vel eædem, vel æquales, quia 12 & 3 ter continent suos consequentes 4 & 1, vel quia 4 & 1 ter continentur in suis antecedentibus 12 & 3.

II. Comparatio unius proportionis similis cum alia simili, ut 12.4 :: 3.1. dicitur *Proportionalitas*, illi autem quatuor termini dicuntur *Proportionales*. Qui dicuntur *continue proportionales* cum medii termini bis sumuntur. Semel enim eadem quantitas est consequens respectu præcedentis, & semel antecedens respectu consequentis. Sic 2, 4, 8, 16 dicuntur continue proportionales, quia 4 & 8 bis sumuntur. Nam dicitur esse 2 ad 4, ut 4 ad 8. Item 4 ad 8, ut 8 ad 16. Si vero fuerit 10.5 :: 2.1. dicuntur termini *discretim proportionales*.

LEMMA I.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, factum ex primo, & quarto, æquale est facto ex secundo, & tertio. Est *Propos.* 19. *l.* 7. *Eucl.*

Sint quatuor proportionales 5.20 :: 4.16

Sicuti 5 × 16 dant = 80

Ita etiam 20 × 4 dant = 80

LEMMA II.

Si datis quatuor numeris, primus se habeat ad tertium, ut reciproce quartus ad secundum, factum ex primo, & secundo æquale erit facto ex tertio, & quarto.

Sint quatuor numeri dati 6, 4, 3, 8, quia inter primum 6, & tertium 3 est eadem proportio dupla, quæ est inter 8 & 4, erit 6.3 :: 8.4; ergo ex *lem.* 1. 6 × 4 = 3 × 8 = 24, ergo factum ex primo, & secundo æquatur facto ex tertio, & quarto.

LEMMA III.

Si factum dividatur per unum ex suis factoribus, prodibit in quoto alter factorum.

Sit factum v. g. 24, quod ortum sit ex 4 × 6, si dividatur per 4, oritur 6; si dividatur per 6, oritur 4.

PRO-

PROPOSITIO I.

De Regula Proportionum.

REgula *Proportionum*, quam ob præstantiam, & immensam utilitatem, *auream* vocant, docet modum inveniendi e tribus numeris cognitis quartum ignotum proportionalem, qui nimirum habeat eandem proportionem ad tertium numerum datum, quam secundus habet ad primum, ideoque dicitur regula *Proportionum*, vel etiam regula *Trium*, quia ex tribus datis eruit quartum. En praxis.

I. Disponantur ordine tres numeri dati, ita ut is, qui quæstionem habet annexam, statuatur tertio loco; ille vero ex duobus aliis, qui cum hoc est homogeneus, hoc est qui eandem rem significat ac terminus tertio loco positus, primo loco ponatur.

II. Multiplica tertium per secundum, & productum divide per primum, quotus dabit quartum proportionalem quæsitum. Res tribus exemplis illustratur.

1. Ulnæ panni 3 stant scutis 9, quot scutis stabunt ulnæ 12 ejusdem panni? Terminus, qui habet annexam quæstionem, sunt ulnæ 12, hic statuatur loco tertio, loco autem primo terminus huic homogeneus, nempe ulnæ 3, scilicet

Ulnæ 3. *scut.* 9 :: *ulnæ* 12. *scut.* ...

Duc 12 X 9, & productum 108, divide per 3, quotus 36 dat quartum proportionalem quæsitum. Nam, ut patet, 3. 9 :: 12. 36

2. Pro

2. Pro alendis 4 convictoribus expenduntur singulis mensibus aurei 48, quot aurei necessarii erunt ad alendos convictores 20? Disponantur termini modo explicato, nimirum

Conv. 4. *aur.* 48 :: *Conv.* 20. *aur.* ...

Duc 48 X 20, & productum 960 divide per 4, quotus 240 dat quartum proportionalem quæsitum, nempe:

4. 48 :: 20. 240

Nam sicuti 4 duodecies continetur in 48, ita 20 duodecies continetur in 240. Multiplicando enim 20 X 12, fit 240.

3. Rex Salomon in ædificando templo habuit operarios 180000. Ponamus cuilibet quotidie solvisse asses 10. Quot scuta Romana singulis diebus expendit?

Si oper. 1. *asses* 10. *quid oper.* 180000?

Multiplicatis 180000 X 10, habetur 1800000, & cum unitas non dividat, habentur pro quarto proportionali asses 1800000. Hos divide per 100 (resectis duabus cyphris) fiunt scuta Romana singulis diebus solvenda 18000.

SCHOL. I. *Si quis terminus numeris heterogeneis constet, reduci debet ad homogeneum. Ut si quæstio sit, libræ* 5, *atque unciæ* 3 *alicujus mercis veneunt scutis* 4, *&* *assibus* 50; *quot scutis stabunt libræ* 12? *Primo reducantur libræ ad uncias tam in primo, quam in tertio termino, multiplicando illas per* 12. *Secundo scuta reducantur ad asses, multiplicando illa per* 100. *Proponenda* *ergo*

ergo erit quæſtio in terminis homogeneis ſic : ſi unciæ 63 *veneunt aſſibus* 450 , *quid unciæ* 144 ?

SCHOL. II. *Cum integris adhærent fracti , prius integri reducuntur ad fractos : integris autem , quibus nulla eſt fractio , ſupponitur unitas ; deinde regula proportionum fit , ut dictum eſt . Si dicatur , hora* $1\frac{1}{4}$ *fluunt ex aliquo canali libræ* 15 *aquæ , quot libræ fluent horis* $2\frac{1}{5}$? *Termini proportionales redacti erunt* $\frac{5}{4}$, $\frac{15}{1}$, $\frac{11}{5}$. *Tum operando juxta præcepta tradita in* Propoſ. 10 , & 11. Cap. 3. , *invenies aquæ libras* $26\frac{2}{5}$.

Demonſtr. clare infertur ex *lemm.* 1. & 3. Nam cum in regula proportionum ſupponantur dati tres numeri proportionales , & quartus , qui eſt ignotus , dari poſſit ; factum ex ſecundo , & tertio æquale erit (*per lem.* 1.) facto ex primo , & quarto , qui eſt ignotus . Proinde ſi factum ex ſecundo , & tertio dividatur per primum , innoteſcet quartus terminus (*per lem.* 3.) ; ergo patet ratio , cur ex tradita regula multiplicari debeat tertius per ſecundum terminum , & factum dividi per primum .

Examen regulæ proportionum omnium expeditiſſimum habetur multiplicando primum terminum per quartum , & ſecundum per tertium . Nam ſi producta ſint æqualia , res bene proceſſit . Ratio patet *ex lem.* 1.

PRO-

PROPOSITIO II.

De Regula proportionum Compoſita .

REgula proportionum *Compoſita* dicitur , cum , præter tres terminos in *Propoſ. præc.* explicatos , alii quoque minus principales accedunt , qui ſignificant tempus , lucrum , damnum &c. qui cum terminis principalibus per multiplicationem componuntur , ut fiant tres ſolum termini . Exempla rem declarabunt .

1. Juvenes 4. contubernales expenderunt diebus 10 aureos 50 , quæritur quot aureos ſolvere debeant juvenes 12 diebus 30 ? Tres principales termini ſunt juvenes 4 , aurei 50 , & juvenes 12 . Ad juvenes 4 ſpectant dies 10 , & ad juvenes 12 dies 30 . Duc itaque 4 X 10 , & 12 X 30 , habentur duo termini compoſiti 40 , & 360 . Dic ergo .

Si 40 *dant aur.* 50 , *quid* 360 ?

Multiplicando 360 X 50 , & productum dividendo per 40 , ut in *præc. Propoſ.* factum eſt , invenitur quartus proportionalis 450.

2. Libræ 200 alicujus mercis tranſvectæ Romam per milliaria 300 poſcunt ſcuta 40 ; quæritur expenſa pro tranſvehendis libris 400 ejuſdem mercis per milliaria 500 ? Tres termini principales ſunt libræ 200 , ſcuta 40 , & libræ 400. Minus principales milliaria 300 , & 500 : qui ſi multiplicentur per ſuos termi-

 nos

nos principales, fient tres termini pro regula trium instituenda, nimirum

$$60000 . 40 :: 200000 . 133\tfrac{1}{3}$$

SCHOL. I. *Regula proportionum composita est regula simplex proportionum repetita; unde etiam regula* Dupli *dicitur, quia duplicem quaestionem involuit. Proinde resolvi etiam potest in duas regulas simplices, in quarum altera ponuntur tres termini principales dati, & quaeritur quartus proportionalis; in altera vero ponuntur circumstantiae, seu termini minus principales, in quorum medio ponitur quartus proportionalis inventus. Sic in superiori exemplo dic, si librae* 200 *exigunt scuta* 40, *quid librae* 400? *Quartus proportionalits est* 80, *ut patet. Dic secundo sic milliaria* 300 *dant* 80, *quid milliaria* 500? *Invenitur quartus proportionalis, ut supra*, 133 $\frac{1}{3}$.

SCHOL. *Haec regula dicitur etiam* del Cinque, *quia terminos quinque notos supponit. Examen fit ut in* praec. Propos.

PROPOSITIO III.

De Regula proportionum Inversa.

IN regulis proportionum tum simplici, tum composita jam explicatis, ita se habet primus terminus ad secundum, sicuti tertius ad quartum, ut exempla allata satis monstrant; proinde ex *Propos.* 14. *lib.* 5. *Eucl.* si primus terminus major, vel minor est tertio, etiam

etiam secundus major, vel minor esse debet quarto, ut consideranti patet. Solet autem nonnunquam accidere ex ipsa natura quaestionis, ut quanto major, vel minor primus terminus est tertio, tanto major, vel minor reciproce esse debeat terminus quartus secundo. In hoc casu regula proportionum dicitur *inversa*, quia scilicet terminorum ordo invertitur. Haerent hic tyrones primo non bene dignoscentes, utra regula sit adhibenda. Sed quae sequuntur exempla, rem satis illustrant.

1. Messores 20 segetem aliquam metunt diebus 4, quaeritur quot diebus illam metere possint messores 10? Patet majori tempore, adeo ut quanto major est terminus primus tertio, tanto major quoque debeat esse quartus incognitus secundo. Nam

Mess.	*dies*		*Mess.*	*dies*
20 .	4	::	10 .	8 .

2. In obsessa Urbe ali possunt milites 1500 mensibus 3, quaeritur quot milites ali poterunt mensibus 6? Certe minorem numerum. Proinde quanto minor est primus terminus tertio, tanto minor quartus erit secundo, scilicet

Mens.	*Mil.*		*Mens.*	*Mil.*
3 .	1500	::	6 .	750 .

3. Ex panno, quod habet latitudinem palmorum 3, requiruntur mihi pro vestibus ulnae 10, quaeritur quot ulnae requirantur ex alio panno, quod latitudinem habet palmorum 4. Certum est, pauciores requiri, adeoque

que quanto minor eſt primus terminus tertio, tanto minor erit quartus ſecundo, nempe

Lat. pal.	*uln.*		*lat. pal.*	*uln.*
3.	10	::	4.	$7\frac{1}{2}$

Ad inveniendum autem in regula Proportionum inverſa quartum proportionalem, multiplicetur primus terminus per ſecundum, & productum dividatur per tertium. Sic in primo exemplo ductis 20 X 4, productum 80 dividatur per 10, habetur quartus proportionalis 8.

Demonſtr. ſequitur ex 2. & 3. *lemm.* Nam in regula proportionis inverſa cum ſe habeat primus terminus ad tertium, ut reciproce quartus ad ſecundum, erit ex 1. *lemm.* productum ex primo & ſecundo æquale producto ex tertio & quarto. Producti autem, quod fit ex tertio & quarto, habetur unus ex factoribus datus, numerus ſcilicet tertio loco poſitus, ergo ſi per hunc dividatur productum æquale, quod fit ex primo & ſecundo, prodibit ex *lem.* 3. quartus proportionalis quæſitus.

Examen itaque regulæ inverſæ fit breviſſime, multiplicando primum terminum in ſecundum, & tertium in quartum. Nam ſi producta ſint æqualia, res bene peracta eſt.

Schol. I. *Arithmetici, in quibus Tacquet, aſſignant dignoſcendæ hujus regulæ indicium hujuſmodi. Cum proponitur aliqua res diverſa a quatuor terminis quæſtionis, tunc proportio erit reciproca, ſeu inverſa. Sic in primo exemplo proponitur ſeges metenda, quæ eſt res omnino diverſa a quatuor terminis proportionalibus. In ſecundo exemplo proponitur annona, quæ eſt res diverſa a quatuor terminis ejuſdem quæſtionis. Similiter in tertio veſtis conficienda, quæ proponitur, eſt quid diverſum a terminis in quæſtione datis. Hoc dictum ſit in gratiam tyronum. Ceterum ex ipſa quæſtionis natura facile dijudicari poteſt, utrum proportio directa ſit, an inverſa.*

Schol. II. *Si terminus, qui annexam habet quæſtionem, ponatur primo loco, ſecundo autem loco terminus illi homogeneus, proportio inverſa reducitur ad directam. Sic in primo exemplo meſſores* 10 *ſe habent ad meſſores* 20, *ut dies* 4 *ad dies* 8, *proinde ducendo* 20 X 4, *& dividendo productum* 80 *per primum terminum* 10, *habetur quartus proportionalis, ut in* Propoſ. 1. hujus. *Similiter in ſecundo exemplo menſes* 6 *ad menſes* 3 *ita ſe habent, ut milites* 1500 *ad milites* 750, *adeoque producto ex* 3 X 1500 *diviſo per primum terminum* 6, *oritur quartus proportionalis* 750, *ut antea.*

Schol. III. *Regulam inverſam compoſitam ultro omittimus, quod tyrones haud parum ſoleat confundere, & in rebus Geometricis, vel etiam in hominum commercio vix unquam occurrat.*

PROPOSITIO IV.

Explicantur nonnulla pro regulis proportionum compendia.

I. Cum in regula directa primus terminus præciſe continet ſecundum, vel (quod idem eſt) præciſe

cise continetur in secundo, tunc reduci potest proportio ad minimos terminos per *Prop.* 2. *cap.* 3., & regulæ praxis brevissima evadit. Sit exemplum, lib. 4. valent scuta 12, quid libræ 9? Reductis 4 & 12 ad minimos terminos 1 & 3, dic si 1 dat 3, quid 9? & ducendo 3×9, habetur quartus proportionalis 27, quia unitas non dividit.

Pro regula inversa in 1 exemplo *Prop.* 3. Si messores 20 exigunt dies 4, quid messores 10? Quia 20 ad 10 se habere debet reciproce, ut quartus terminus ad secundum 4, reductis 20 & 10 ad minimos terminos 2 & 1, dic si 2 dat 4, quid 1? ductisque 2×4, habetur quartus proportionalis 8.

II. Ad evitandum divisionis prolixioris tædium, dividatur tertius terminus per primum, & quotus ducatur in secundum: vel dividatur secundus per primum, & quotus ducatur in tertium; in utroque enim casu operatio fit brevior. Ut si leucæ 25 dant milliaria Italica 60, quid leucæ 100? Divisis 100 per 25, duc quotum 4×60, erit 240 quartus proportionalis quæsitus. Vel diviso 60 per 25, quotus $2\frac{2}{5}$ ducatur in 100, productum $\frac{1200}{5}$, seu 240, erit quartus proportionalis quæsitus.

III. Regula proportionum confici potest per solam divisionem, nimirum dividendo primum terminum per secundum, & dividendo per hunc quotum terminum tertium. Sic ex. gr. 2 gradus circuli maximi terræ continent milliaria Italica 120, gradus 360 quot milliaria continebunt. Diviso primo termino per secundum, habetur $\frac{2}{120}$, hoc est $\frac{1}{60}$; per hunc divide 360, quotus $\frac{21600}{1}$ dat milliaria Italica quæsita.

IV. Si fractiones afficiant primum terminum tantum, ut si dicatur $12\frac{1}{2}$ dant 4, quid 20? Multiplica per denominatorem 2 tam primum, quam tertium terminum, fient tres termini proportionales sine fractionibus 25, 4, & 40. Similiter si fractiones ejusdem nominis afficiant primum & tertium terminum, ut si dicatur $3\frac{2}{5}$ dant 20, quid $10\frac{3}{5}$? Multiplicatis iisdem duobus terminis per denominatorem 5, erit regula sine fractis, ac termini proportionales 17, 20, 53. Quibuscum regula de more peragitur. Horum ratio, perceptis fractorum regulis, satis patet.

Schol. *Hæc, aliaque similia compendia dicuntur* Italica, *vel quia ab Italis inventa, vel quia in Italia usum habeant frequentiorem.*

PROPOSITIO V.

De Regula Societatis.

Regula, quæ docet modum dividendi numerum in data proportione, vulgo dicitur *Regula Societatis*, quod apud homines mercaturæ societatem ineuntes frequenter adhiberi soleat. Ecce exempla.

Mercatores *A*, *B*, *C*, societate inita, lucrati sunt aureos 800. *A* posuit in sortem communem aureos 100, *B* aureos 160, *C* vero 240: quæritur quantum quisque ex eo lucro debeat accipere. Collige in unam summam singulorum pecuniam, nempe aureos 500, Deinde instituatur toties regula proportionum, quot sunt singulorum pecuniæ, ita ut primus terminus semper

per ſtatuatur ſumma pecuniæ collatæ, ſecundus lucrum aureor. 800, tertius vero uniuſcujuſque pecunia *A*, *B*, *C*.

Dic ergo ſi 500 dat 800, quid 100? 160
quid 160? 256
quid 240? 384

800

Patet lucrum *A* fuiſſe aureorum 160, lucrum *B* 256, & *C* 384, quæ ſimul efficiunt ſummam lucri, adeoque ſtatim habetur regulæ examen.

II. Si pecunia unius diutius fuerit in negotiatione, quam pecunia alterius, tunc uniuſcujuſque pecunia multiplicari debet per ſuum tempus. Cetera peragenda, ut ſupra.

Sit exemplum. *A* poſuit in ſortem communem aureos 50 annis 2, *B* aureos 100 annis 3, *C* vero aureos 200 anno 1. Lucrum fuit aureorum 500: quæritur ſingulorum lucrum. Duc 50 × 2, 100 × 3, & 200 × 1, producta dant ſummam 600, quæ erunt primus terminus regulæ proportionum: ſecundus lucrum comparatum aureorum 500; tertius vero pecunia ſingulorum per ſuum tempus multiplicata.

Dic ergo ſi 600 dant 500, quid 100? $83\frac{1}{3}$
quid 300? 250
quid 200? $166\frac{2}{3}$

500

Eſt

Eſt igitur lucrum ipſius *A* aureorum $83\frac{1}{3}$. Lucrum *B* aureorum 250, *C* vero aureorum $166\frac{2}{3}$, quæ addita faciunt aureorum ſummam 500.

III. Quod ſi ſingulorum pecunia æqualis fuit, tempus autem inæquale: nam *A* reliquit in ſocietate pecuniam ſuam menſibus 7, *B* vero menſibus 6, *C* denique menſibus 12, lucrum autem extiterit aureorum 1000; collige in unam ſummam menſes, faciunt 25, eritque hic primus regulæ terminus, ſecundus erit lucrum, tertius menſes ſingulorum. Tum adhibe ter regulam auream, invenies lucrum primi aureos 280, ſecundi 240, tertii 480.

Si Menſes aur. quid menſes
25. 1000 :: 7? 280
6? 240
12? 480

1000

Coroll. Hinc apparet modus dividendi pecuniam v. g. aureos 1000 in proportione data temporis, quo tres famuli domino ſuo ſervierunt, quorum primus ſerviverit annis 7, ſecundus annis 6, tertius annis 12. Aliæ ſimiles quæſtiones ex hac regula facile ſolvuntur, quæ non eſt, niſi regula proportionum ſæpe repetita, ut patet. Quod de lucro dictum eſt, intelligi eodem modo debet de damno, ſi ſocietati improſpere ceſſerit, ac damnum in ſingulos ſit dividendum, habita ratione pecuniarum, & temporis.

L PRO-

PROPOSITIO VI.

De Regula Alligationis.

CUM variæ res diversi pretii inter se alligantur; seu miscentur, ut varii liquores, merces, metalla &c. atque inde pretium partibus mixti respondens inquiritur: seu, cum pretio quodam medio proposito, quæritur, quantum ex singulis mercibus, aut liquoribus misceri debeat, ut pretio illo arbitrario vendi possint; in utroque casu adhibetur regula, quam Arithmetici regulam *Alligationis* vocant, quæ per exempla satis superque innotescet.

I. Conflanda est statua argentea librarum 300. Artifex duo argenti genera posuit, alterum quod in singulas libras stat scutis 30, alterum vero scutis 25. Ex priori posuit libras 120, ex posteriori libras 180. Quæritur quot scutis stabit in singulas libras ejusmodi statua?

Duc libras	120 X 30	*fit*	3600
	180 X 25		4500
			8100

Tum divide totius argenti pretium 8100 per numerum librarum 300, quotus 27 indicat unius libræ pretium. Nam si lib. 300 valent scut. 8100, quid lib. 1.? Ex regula aurea habetur 27.

II. Sunt duo olei, aut vini genera, mensura 1. primi generis stat juliis 24, secundi generis mensura 1. valet

valet juliis 35. Si quis non habeat nisi julios 33, & mensuram unam ex utroque vino mixtam petat, quæritur ex utroque quantum debeat accipere.

1. Pone unum pretium statutum sub altero 24 & 35, & ad sinistram pretium arbitrarium 33, medium inter pretia statuta 24 & 35; ad dexteram vero differentias inter hoc, & pretia illa, sed alternatim ita ut differentia pretii minoris 24 (hoc est 9) ponatur juxta pretium majus 35, & differentia pretii majoris 35, nempe 2, ponatur juxta pretium minus 24, ut in sequenti exemplo factum vides.

2. Colligantur differentiæ in unam summam, ut hic 11, & instituatur regula trium toties, quot sunt differentiæ, nempe bis in hoc exemplo; ita ut summa differentiarum 11 occupet primum locum, mensura vero 1 secundum locum, & una ex differentiis tertium. Tum dic, si 11 dat 1, quid 9? Rursus, si 11 dat 1, quid 2? Invenies ex potiori vino accipiendas esse $\frac{9}{11}$ unius mensuræ, ex secundo vero $\frac{2}{11}$, quæ simul sumptæ faciunt $\frac{11}{11}$, hoc est mensuram unam quæsitam.

Pretia Differ.

$$33 \begin{Bmatrix} 24 \\ 35 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 9 \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{r} \text{Si 11 dat 1, quid 2?} \;\; \frac{2}{11} \\ \text{quid 9?} \;\; \frac{9}{11} \\ \hline \frac{11}{11} \end{array}$$

Summa 11

III. Quando autem plurium, quam duarum rerum pretia statuta proponuntur, ita tamen ut saltem unum sit majus, alterum vero minus pretio arbitrario; tunc

plures

plures fieri debent alligationes, quod exemplo satis vulgari explicatur.

Libra 1 Garyophili valet juliis 3. Piperis libra, juliis 4. Cinnamomi, 6. Croci, 9: quæ brevitatis gratia sint *A*, *B*, *C*, *D*. Pretium vero medium sit *M*. Quæritur, quantum quis debeat ex singulis accipere, ut mixti libra 1 valeat juliis 7. Primo disponantur ordinatim pretia, ut in exemplo sequenti. Secundo alligentur inter se duo pretia *A* & *D*, hoc est comparentur ambo cum pretio *M*, ut inveniantur differentiæ excessus, & defectus, nempe 2 & 4, quæ ponantur alternatim juxta *A* & *D* modo superius explicato. Eodem modo alligentur duo pretia *B* & *D* (idem pretium alligari potest pluries) differentiæ excessus est 2, defectus autem est 3, quæ ponantur alternatim juxta *B* & *D*. Similiter alligentur *C*, & rursus *D*, differentiæ sunt 2 & 1, quæ pariter statuantur alternatim juxta *C* & *D*.

3. Colligantur omnes illæ differentiæ in unam summam, quæ hic est 14. Deinde dic, si 14 dat libram 1, quid differentia 2? erit $\frac{2}{14}$, seu $\frac{1}{7}$; quod toties iteretur, quot sunt pretia data *A*, *B*, *C*, *D*, adeo ut tres differentiæ 4, 3, 1, quæ appositæ sunt ipsi *D*, addantur, & unicam differentiam 8 efficiant. En totius calculi typus.

		Pretia		*Differ.*
M 7	*A*	3		2.
	B	4		2.
	C	6		2.
	D	9		4. 3. 1.
			Summa	14

Si

$$\begin{array}{lrl} \text{Si 14 dat lib. 1. quid} & 2? & \frac{2}{14} \\ & 2? & \frac{2}{14} \\ & 2? & \frac{2}{14} \\ & 8? & \frac{8}{14} \\ \hline & \text{Summa} & \frac{14}{14} = 1. \end{array}$$

Si fractiones, aut partes mixti additæ adæquent totum, regulæ examen exhibent. Sic in exemplo $\frac{14}{14} = 1$.

Demonstr. Summa differentiarum, quibus pretia statuta differunt per excessum, & defectum a pretio medio, habet ad totum mixtum eandem rationem, quam habent singulæ differentiæ seorsim sumptæ ad singulas partes mixti seorsim sumptas, ut patet; proinde toties regula proportionum iteratur, quot sunt differentiæ: quæ idcirco locum alternant, ut pretium deficiens unius compensari valeat per excessum alterius pretii. Quod &c.

Coroll. I. Ex superiori exemplo manifestum est, unumquodque pretium saltem semel alligari debere, idemque pretium posse pluries assumi, ut factum est cum pretio *D*.

Coroll. II. Alligationes hujusmodi fieri possunt variis modis, siquidem pretium medium semper comparetur cum duobus pretiis, altero majori, altero minori. Pro diversa autem alligatione, diversa erit unius, vel alterius mercis, aut liquoris quantitas in mixto posita, ut patet.

PRO-

PROPOSITIO VII.

De regula simplicis Positionis, seu falsi.

Ea regula *falsi* dicitur, quæ ex positione numeri plerunque falsi docet verum numerum invenire, qui quæstioni satisfaciat. Dicitur *simplicis Positionis*, si simplex ponatur numerus, ut in hac Propos. fiet; duplicis vero, si duo numeri assumantur, ut in *Prop. seq.*

Regula simplicis Positionis in tribus consistit, nempe

1. Ponitur numerus, qui videtur aptus ad solvendam quæstionem, qui dicitur *Positio*.

2. Examinatur ille numerus, an talis sit, qualis exquiritur.

3. Instituitur regula proportionum ad verum numerum inveniendum. Res exemplis fit evidens.

I. Sempronius testamento mandavit, aureos centum distribui in tres fratris sui filios *A*, *B*, *C* hac lege, ut *A* habeat partem duplam *B*, & *B* partem triplam ipsius *C*. Quæritur quantum singuli debeant accipere.

Pone *A* habere aureos 6, habebit *B* aureos 3, *C* vero 1. Examina, an tres illæ partes 6, 3, 1 simul efficiant 100 (nam si 100 efficerent, problema esset absolutum) sed illæ efficiunt tantum 10. Adhibe jam regulam proportionum, in qua ponatur primo loco numerus, qui ex falsa positione provenit, ut hic 10: secundo loco statuitur numerus primo assumptus, seu Positio, ut hic 6; tertio loco numerus datus in quæstione, hoc est 100, invenies 60. Itaque *A* habebit 60 aureos, *B* 30, *C* vero 10, quorum summa est 100, scilicet

$$10 . 6 :: 100 . 60.$$

II. Cajus interrogatus, quot aureos haberet, respondit, aureorum meorum $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ faciunt summam 470. Quæritur ea summa? Patet hic quæri numerum, cujus partes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ simul sumptæ efficiant 470. Ad evitandas fractiones assume numerum, qui contineat partes in quæstione expressas. Esto hic 60, cujus $\frac{1}{3} = 20$, $\frac{1}{4} = 15$, $\frac{1}{5} = 12$, quæ partes additæ faciunt 47. Debebant autem efficere 470. Institue regulam proportionum, dispositis terminis modo superius explicato, nimirum

$$47 . 60 :: 470 . 600$$

Habebat ergo Cajus aureos 600, quorum $\frac{1}{3} = 200$, $\frac{1}{4} = 150$, $\frac{1}{5} = 120$, quæ partes simul additæ efficiunt 470.

III. Sunt quatuor molæ, quarum prima singulis horis molit tritici modios 7, secunda 6, tertia 4, quarta 3. Quæritur tempus, quo molentur tritici modii 360, omnibus illis molis simul adhibitis.

Pone requiri horas 5, hoc tempore prima mola conficit modios 35, secunda 30, tertia 20, quarta 15, qui omnes sunt modii 100, debebant autem esse 360. Instituatur ergo regula proportionis: si modii 100 poscunt horas 5, quid modii 360? Invenies horas 18. Nam

$$100 . 5 :: 360 . 18$$

Quo tempore prima mola conficiet modios 126, secunda 108, tertia 72, quarta 54, qui simul additi efficiunt modios 360.

Demonstr. Ut se habet (in primo exemplo) 10 ad $6 + 3 + 1$ simul sumptos in falsa positione, ita se habet in in vera positione 100 ad 60 + 30 + 10 simul sumptos. Proinde regula stat in hoc, ut numerus falsus 10, productus per numerum falsum 6, ita se habeat per regulam auream ad ipsum numerum falsum 6, sicuti verus numerus 100 ad verum numerum 60.

PROPOSITIO VIII.

De Regula duplicis Positionis.

Regula *duplicis Positionis* non unum, sed duos supponit numeros, ut in *Propos. præc.* dictum est, solvitque plures quæstiones, quæ per unam positionem resolvi nequeunt. Omnes tamen quæstiones, quæ per unam positionem solvuntur, etiam per duas solvi possunt. Quando autem duplici positione opus sit, indicabitur inferius in *Schol.* 1. En regulæ ordo.

1. Pone pro numero quæsito quemcunque numerum, qui dicitur *Positio*, & cum eo procede juxta tenorem quæstionis; cui si non satisfaciat, errorem (hoc est excessum, vel defectum, quo positio aberrat a numero quæsito) subscribe eidem positioni, cum signo +, vel —, quorum unum plus, sive excessum, alterum minus, seu defectum denotat.

2. Ponatur alius numerus priori major, vel minor, cum quo similiter examinetur quæstio proposita, cui si non satisfaciat, errorem pariter ei positioni subscribe cum signis +, vel —. Cum ambo errores sunt per excessum, vel ambo per defectum, dicuntur *similes*. Cum autem unus est per excessum, alter per defectum, hoc est cum signis diversis + & —, dicuntur errores *dissimiles*.

3. Si

3. Si errores sunt similes, ducatur prima positio in errorem positionis secundæ, & vicissim positio secunda in errorem primæ positionis. Tum horum productorum differentia dividatur per differentiam errorum, quotus erit numerus quæsitus.

4. Si errores sunt dissimiles, productorum summa dividitur per summam errorum, quotus dat quæsitum.

I. Tres juvenes *A*, *B*, *C* lucrati sunt aureos 47. *B* obtinuit aureos 5 plus quam *A*, *C* tantundem quantum *B*, & insuper 10, quæritur lucrum singulorum.

Pone lucrum *A* fuisse 4, lucrum *B* erit 9, *C* vero 19. Adde simul 4, 9, 19, fiunt 32, debebant esse 47, est ergo error, seu defectus in 15.

Rursus pone lucrum *A* fuisse 7, erit lucrum *B* 12, *C* vero 22, qui simul faciunt 41, quæ summa deficit a vera 47 per defectum 6.

Cum itaque duo errores similes sint (nempe ambo per defectum) duc positionem 4 in errorem secundæ positionis, hoc est in 6; & positionem 7 in errorem 15, fiunt duo producta 24, & 105, quorum differentia est 81, quem divide per differentiam unius erroris ab alio, idest per 9, (subtrahendo errorem 6 ex alio errore 15) quotus 9 dat numerum quæsitum. Itaque lucrum *A* fuit aureorum 9, *B* vero 14, & *C* 24, quorum summa est 47.

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Posit. } 4,\ \textit{Err.} -15\\ \textit{Posit. } 7,\ \textit{Err.} -\ \ 6\end{array}\right\}\ 9\ \textit{diff.}$$

$$\begin{array}{rl}\textit{Prod.}\ 4 \times 6 = & 24\\ 7 \times 15 = & \underline{105}\\ \textit{Differ.} & 81\end{array}$$

M II.

II. Si utraque positio sit excedens, praxis est omnino eadem. Ponamus enim lucrum *A* fuisse 12, erit lucrum *B* 17, & lucrum *C* 27, quorum summa est 56, excedens numerum datum 47 per errorem 9.

Pone iterum 11 pro lucro *A*, erit lucrum *B* 16, & lucrum *C* 26, quorum summa 53 adhuc peccat per excessum 6. Cum igitur errores similes sint (nempe per excessum) duc positionem 12 in errorem 6 alterius positionis, & positionem 11 in errorem 9. Tum subtrahe productum minus 72 ex majori producto 99, & residuum 27 divide per differentiam errorum 9 & 6, hoc est per 3, quotus 9 dat numerum quæsitum, ut prius.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Posit.}\ 12,\ \textit{Err.}\ +9 \\ \textit{Posit.}\ 11,\ \textit{Err.}\ +6 \end{array}\right\}\ 3\ \textit{differ.}$$

$$\begin{array}{ll} \textit{Prod.} & 6 \times 12 = 72 \\ & 9 \times 11 = 99 \\ \hline & \textit{Differ.}\ 27 \end{array}$$

III. Quod si una positio sit excedens, altera deficiens, summa productorum dividitur per summam errorum, ut dictum est supra num. 4. Sit idem exemplum claritatis gratia.

Pone lucrum *A* fuisse 5, lucrum *B* erit 10, & lucrum *C* 20, quorum summa 35 deficit a summa data 47 per defectum 12; sumendus est igitur numerus major.

Pone lucrum *A* 11, *B* vero 16, & *C* 26, summa omnium 53 excedit veram summam 47 in 6. Ducatur jam positio prima 5 in errorem 6, & vicissim positio 11 in errorem 12. Deinde quia errores sunt dissimiles, addantur

dantur

dantur duo producta 30 & 132, eorumque summa 162 dividatur per summam errorum 18, quotus 9 dat rursus numerum quæsitum, ut antea.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Posit.}\ 5,\ \textit{Err.}\ -12 \\ \textit{Posit.}\ 11,\ \textit{Err.}\ +6 \end{array}\right\}\ 18\ \textit{Summa}$$

$$\begin{array}{ll} \textit{Prod.} & 5 \times 6 = 30 \\ & 11 \times 12 = 132 \\ \hline & \textit{Summa}\ 162 \end{array}$$

Sit aliud exemplum. Interrogatus Pythagoras de numero suorum discipulorum, respondit, eorum dimidium dare operam Geometriæ, quartam partem Philosophiæ, septimam partem servare silentium; insuper tres alios se habere instituendos. Quæritur eorum discipulorum numerus.

Ponatur discipulos habuisse 56, dimidium erit 28, quarta pars 14, septima pars 8, quorum summa est 50: his addantur illi 3, fiunt 53, deberent esse 56; est ergo error per defectum 3, quem nota juxta ipsam positionem 56.

Rursus ponatur discipulorum numerus 112, dimidium erit 56, quarta pars 28, septima 16, quæ simul efficiunt 100, additisque 3, fiunt discipuli 103. Est ergo iterum error per defectum 9, quem nota ad positionem 112.

Jam duc positionem primam 56 in errorem secundæ positionis, hoc est in 9, & vicissim positionem secundam 112 in alterius positionis errorem 3, proveniunt 504 & 336. Cumque errores similes sint, eorum productorum differentiam 168 divide per differentiam errorum

rum

rum 6; quotus 28 dat numerum quæſitum diſcipulorum. Nam ejus dimidium eſt 14, quarta pars 7, ſeptima 4, quæ ſimul faciunt 25, additiſque 3, habetur numerus 28.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Poſit.}\ \ 56,\ \textit{Err.} - 3 \\ \textit{Poſit.}\ 112,\ \textit{Err.} - 9 \end{array}\right\}\ 6\ \textit{differ.}$$

$$\begin{array}{rl} \textit{Prod.}\ 56 \times 9 = & 504 \\ 112 \times 3 = & \underline{336} \\ \textit{Differ.} & 168 \end{array}$$

Poſtremo ſunt tres numeri ignoti a, b, c, qui ſumpti bini dant ſummam, ut ſequitur

$$\begin{array}{l} a + b = 50 \\ b + c = 70 \\ a + c = 60 \end{array}$$

Quæritur ſingulorum valor. Pone $a = 16$, erit $b = 34$, ergo $c = 36$, proinde $a + c = 16 + 36$, hoc eſt 52. Sed eſſe debebat 60; ergo poſitio prima 16 peccat per defectum 8.

Pone itaque $a = 18$, erit $b = 32$, ergo $c = 38$, adeoque $a + c = 18 + 38$, hoc eſt $= 56$, ſed debebat eſſe 60; eſt ergo rurſus error per defectum 4. Pro inveniendo vero numero, fiant cetera, ut ſupra; reperietur $a = 20$, proinde $b = 30$, $c = 40$, unde $a + c = 20 + 40$, ſeu 60, quod quærebatur.

SCHOL. *Indicium quando quæſtio propoſita ſolvi non poſſit per unam poſitionem, ſed duplicem omnino requirat, eſt cum quæſtioni aliquis determinatus numerus additus eſt, qui una cum numero ad libitum poſito debet aſſumi. Sic in primo exemplo numeri illi determinati 5, & 10, qui adduntur numero ad libitum poſito, indicio ſunt duplici poſitione opus eſſe. Item in ſecundo exemplo determinatus ille numerus diſcipulorum 3 indicat, quæſtionem non per unam, ſed per duplicem poſitionem eſſe ſolvendam, & ſic de ceteris.*

PROPOSITIO IX.

Aurificis furtum in corona Hieronis regis detegere.

VItruvius *lib.* 9. *Cap.* 3. refert, ab Archimede deprehenſam fuiſſe fraudem, quam artifex auream Hieronis regis coronam, admixta argenti portione, adulteraverat; ſed quo præciſe artificio id egerit, non ſatis conſtat. Duas tamen maſſas feciſſe dicitur, alteram ex auro puro ejuſdem ponderis cum corona, alteram ex argento item puro ponderis ejuſdem: tum hæc tria in vas aqua plenum ſeorſim immittens, aquam inde effluentem ſedulo exploravit, atque hinc quantum argenti in ea corona fuerit admixtum, invenit.

Fingamus igitur coronæ pondus fuiſſe lib. 12, item auri, & argenti maſſas; & dum corona in vas aqua plenum demitteretur, effluxiſſe aquæ libras $7\frac{4}{5}$, dum autem immergeretur auri maſſa, effluxiſſe aquæ libras $7\frac{1}{5}$, immerſa demum argenti maſſa, effluxiſſe aquæ libras $10\frac{4}{5}$. Jam ex regula duplicis poſitionis ponatur, in ea corona fuiſſe auri lib. 9, erant ergo argenti lib. 3. Itaque per regulam proportionum dic, ſi puri auri lib. 12 dant

dant aquæ libras $7\frac{1}{5}$, quid lib. 9 ? invenies lib. $5\frac{2}{5}$. Item, si puri argenti lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{4}{5}$, quid lib. 3 ? proveniunt lib. $2\frac{7}{10}$. Adde simul libras $5\frac{2}{5}$, & $2\frac{7}{10}$, habentur aquæ lib. $8\frac{1}{10}$, debebant autem esse lib. $7\frac{4}{5}$; est ergo error per excessum $\frac{3}{10}$, qui notetur cum signo + una cum positione assumpta 9.

Ponatur secundo in eadem corona fuisse auri lib. 8, ergo ex argento erant lib. 4. Dic igitur per regulam auream, si auri puri lib. 12 dant aquæ lib. $7\frac{1}{5}$, quid lib. 8? inveniuntur lib. $4\frac{4}{5}$. Similiter, si argenti puri lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{4}{5}$, quid lib. 4? proveniunt per regulam proportionum aquæ lib. $3\frac{3}{5}$. Adde simul libras $4\frac{4}{5}$, & $3\frac{3}{5}$, fit summa librarum aquæ $8\frac{2}{5}$, debebant autem esse lib. $7\frac{4}{5}$. Peccatum est igitur rursus per excessum $\frac{3}{5}$, seu $\frac{6}{10}$, qui notetur cum + juxta positionem 8, ut sequitur

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Posit. } 9, \ \textit{Err. } + \frac{3}{10} \\ \textit{Posit. } 8, \ \textit{Err. } + \frac{6}{10} \end{array}\right\} \frac{3}{10} \ \textit{differ.}$$

$$\begin{array}{rl} \textit{Prod.} & 9 \times \frac{6}{10} = \frac{54}{10} \\ & 8 \times \frac{3}{10} = \frac{24}{10} \\ \hline & \textit{Differ. } \frac{30}{10} = 3 \end{array}$$

Ductis jam $9 \times \frac{6}{10}$, & $8 \times \frac{3}{10}$ habentur $\frac{54}{10}$ & $\frac{24}{10}$; quorum differentiam $\frac{30}{10}$, seu 3, divide per differentiam errorum, hoc est per $\frac{3}{10}$, quotus $\frac{30}{3}$, seu 10, dat auri libras quæsitas. Erant ergo immixtæ 2 argenti libræ.

Ut fiat examen dic, si auri lib. 12 dant aquæ lib. $7\frac{1}{5}$, quid lib. 10? invenies lib. 6. Item, si argenti lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{4}{5}$, quid lib. 2? invenies lib. $1\frac{4}{5}$. Ad-

de

de igitur 6, & $1\frac{4}{5}$, summa librarum $7\frac{4}{5}$ dat tantum aquæ, quantum, dum corona immergeretur, effluxit.

Schol. I. *Sed nota, non opus fuisse Archimedi, aut cuiquam alteri, qui experimentum hujusmodi facere velit, conficere auri, vel argenti massas ejusdem ponderis cum corona; sed satis esse aliquam auri, & argenti portionem noti ponderis assumere, ut habeatur inter auri, ac argenti pondus, & aquæ effluentis quantitatem proportio.*

Schol. II. *Per regulam duplicis positionis aliæ plures quæstiones pulcherrimæ solvi possunt, quæ tamen longe facilius, & universali modo per Algebram expediuntur: a qua pariter peti debet Propositionis hujus simplex, ac genuina demonstratio; ut videre est apud Bernardum Lamy in Elementis Mathematicis an.* 1704. *edit. Paris. pag.* 358. *Demonstrationes autem aliunde petitæ prolixæ sunt admodum, & implicatæ, quas proinde nos prætermittimus.*

PROPOSITIO X.

Datis duobus numeris tertium proportionalem invenire.

Duc secundum in seipsum, & productum divide per primum, quotus erit tertius proportionalis quæsitus. Dati sint 2 & 8, quibus tertius proportionalis inquiritur. Ducatur 8×8, & productum 64 dividatur per 2, quotus 32 est numerus quæsitus. Sic 2, 8, 32, sunt in eadem proportione subquadrupla. Ratio patet ex 1. *lemm.*

Schol.

Schol. *Si numeri dati sint inter se primi, hoc est unus non sit alterius multiplex, tertius proportionalis non erit numerus integer, sed fractus. Sic datis* 2 *&* 5 *invenitur per hanc Proposit. tertius proportionalis* $\frac{25}{2}$, *hoc est* $12\frac{1}{2}$.

PROPOSITIO XI.

Inter duos numeros datos medium proportionalem invenire.

Medius proportionalis inter duos numeros datos dicitur numerus, qui ita se habet ad alterum datum, ſicut alter datorum ad ipſum; ita ut numeri dati ſint extremi, & ipſe medius: qui bis ſumitur, ſemel ut conſequens reſpectu primi, & ſemel ut antecedens reſpectu alterius.

Dati ſint numeri 4 & 16, inter quos medius proportionalis quæritur. Duc illos inter ſe, & ex producto extrahe radicem quadratam, radix erit medius proportionalis. Sic $4 \times 16 = 64$, cujus radix quadrata eſt 8 per *Prop.* 1. *Cap.* 3. Sunt igitur 4, 8, 16 continuo proportionales, nam 4 . 8 : : 8 . 16. Ratio patet ex 1. *lem.*

Schol. I. *Si productum ex numeris datis non ſit quadratum, ita ut radix quadrata ab eo erui non poſſit ſine reſiduo; tunc medius proportionalis inveniri nullo modo poteſt. Nam dati numeri ſint v. g.* 2 *&* 5, *radix quadrata per* Prop. cit., *&* Schol. 3. *erit* $3\frac{1}{6}$. *Adeoque erunt in continua proportione* 2, $3\frac{1}{6}$, 5, *quod eſt falſum, nam ſi reducantur ad idem nomen, erunt* $\frac{12}{6}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{30}{6}$; *ſeu* 12, 19, 30, *qui nullo modo ſunt proportionales, ut patet.*

Schol. II. *Cum omne quadratum intelligi poſſit multiplicatum eſſe per unitatem, hinc omnis radix quadrata erit media proportionalis inter unitatem, & ipſum quadratum. Sic* 25, *radix quadrata numeri* 625, *eſt media proportionalis inter* 1 *&* 625, *proinde* 1, 25, 625 *ſunt in eadem ratione continua. Nam* 1 . 25 : : 25 . 625.

PROPOSITIO XII.

Inter duos numeros datos duos medios proportionales invenire.

Quadratum unius extremi ducatur in alterius extremum, & ex producto extrahatur radix cubica per *Prop.* 3. *Cap.* 4., quæ erit duorum mediorum proportionalium prior. Deinde quadratum alterius extremi ducatur in alterum extremum, & ex producto pariter extrahatur radix cubica, quæ erit duorum mediorum proportionalium poſterior.

Dati ſint numeri 2 & 16, quos inter invenire oporteat duos medios proportionales. Quadra minorem numerum 2, ejuſque quadratum 4 duc in 16, fiunt 64, cujus radix cubica 4 erit prior duorum proportionalium. Similiter quadratum alterius numeri 16, nempe 256, duc in 2, fiunt 512, cujus radix cubica 8 erit duorum proportionalium poſterior; proinde 2, 4, 8, 16 ſunt in continua proportione, ut patet, cum ſit 2 ad 4, ut 4 ad 8, & 4 ad 8, ut 8 ad 16.

N Schol.

SCHOL. *Si ad numerum datum, & primum medium proportionalem inventum, quæratur tertius proportionalis* per Propoſ. 10. hujus; *vel ſi inter medium proportionalem inventum, & alterum numerum datum inveniatur medius proportionalis* per Propoſ. 11. hujus; *in utroque caſu obtinebitur ſecundus duorum mediorum proportionalium quæſitus. Ceterum ſi numeri dati ſint tales, ut inde radix cubica obtineri non poſſit ſine fractionibus, tunc medii proportionales inveniri nequeunt, ut de uno medio proportionali dictum eſt in* Schol. Propoſ. præc.

PROPOSITIO XIII.

Quæſtiones aliquot practicæ expediuntur.

ETſi quæſtiones, quas hic proponimus, ex regulis proportionum jam explicatis facile reſolvi valeant; quia tamen eas ordinare, atque expedire tyronibus negotium faceſſit; adeoque Arithmetici practici peculiares de his tractatus inſtituerunt, proinde nos præcipuas breviter indicabimus, ita tamen ut ex ipſa praxi operandi etiam methodus innoteſcat.

1. Lucilius vendidit aureis 9072 fundum, quem emerat aureis 8400; quærit quantum ex ſingulis 100 lucratus ſit.

Dic per regulam proportionum ſi 8400 fiunt 9072, quid 100? Invenies 108. Fuit ergo ex ſingulis 100 lucrum aureorum 8.

Vel ſic, ſubtrahe 8400 ex 9072, differentia, ſeu lucrum eſt aureorum 672. Dic ergo, ſi 8400 dat 672, quid 100? invenies 8, ut antea.

Examen fit ſi dicas, 100 fiunt 108, quid 8400? invenies 9072.

2. Fingamus ab eodem Lucilio ſolvendam eſſe penſionem ſcutorum 500 annis quinque, hoc eſt ſcuta 100 ſingulis annis; quam ille emit parata pecunia, ſolutis ſtatim ſcutis 400. Quæritur, quantum lucri ex ſingulis 100 percipiat.

Dic per regulam auream, ſi ſcuta 400 fiunt 500, ſeu *per Prop.* 4. *hujus*, ſi 4 fiunt 5, quid 100? invenies 125; adeoque ex ſingulis 100 habet lucrum ſcutorum 25.

Examen erit, ſi dicas 100 fiunt 125, quid 400? fiunt 500.

SCHOL. *Quæſtiones hujus generis pertinent ad regulas lucri, ſeu* ſimplicis meriti, *ut vocant.*

3. Fabius debet Sempronio aureos 660 annis tribus ſolvendos, hoc eſt ſingulis annis aureos 220. Paratus tamen eſt ſtatim aureos 660 creditori ſolvere, ſiquidem 10 ex ſingulis 100 ſibi relaxet. Quæritur, quot aureos ſolvere debeat.

Adde lucrum 10 ad 100 fiunt 110. Tum per regulam auream ter repetendam (quot ſcilicet anni ſunt) dic ſi 110 fiunt 100, vel (*per Propoſ.* 4. *hujus*) ſi 11 fiunt 10, quid 220? fiunt 200. Rurſus dic, ſi 11 fiunt 10, quid 200? invenies $181\frac{9}{11}$. Demum, ſi 11 dant 10, quid $181\frac{9}{11}$? proveniunt $165\frac{35}{121}$. Addantur ſimul 200, $181\frac{9}{11}$, $165\frac{35}{121}$. Erit ſumma $547\frac{13}{121}$. Accipiet ergo Sempronius tantum aureos $547\frac{13}{121}$.

4. Eadem ratione ſi quis ad tres annos domum conduxerit cum annua penſione ſcutorum 300; domino autem ejus domus omnem ſtatim ſummam in anteceſſum ſol-

solvat ea conditione, ut sibi scuta 5 pro singulis 100 compenset: dices, si 105 fiunt 100, seu (dividendo 105, & 100 per 5) si 21 fiunt 20, quid 300? invenies $285\frac{5}{7}$. Rursus, si 21 fiunt 20, quid $285\frac{5}{7}$? fiunt $272\frac{16}{147}$. Demum si 21 dant 20, quid $272\frac{16}{147}$? proveniunt $32\frac{1216}{3087}$. Horum summa $590\frac{20}{100}$ (redactis fractionibus in partes centesimas) in antecessum domus illius domino solvenda est.

Quod si aurei illi 660 a Fabio triennio post solvendi sint; tunc additis, ut supra 10, ad 100, dic si 110 fiunt 100, seu, *per Prop.4. hujus*, si 11 fiunt 10, quid 660? erunt 600. Rursus, si 11 fiunt 10, quid 600? invenies $545\frac{5}{11}$. Demum, si 11 fiunt 10, quid $545\frac{5}{11}$? Fiunt $495\frac{105}{121}$; & hi solum Sempronio solvendi sunt.

Vel brevius, duc $660 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000$, & productum 660000, divide per $11 \times 11 \times 11 = 1331$, quotus dat $495\frac{105}{121}$, ut antea.

SCHOL: *Hæc praxis vulgo dicitur*, scontare a capo d'anno.

5. Accepit Cajus aureos 500 cum usura aureorum 10 ex singulis 100 in annum ea lege, ut nisi solvat singulis annis, fiat ex fœnore auctio sortis. Nihil fuit a Cajo solutum toto triennio. Quæritur, quantum ipse pro sorte, atque usuræ usura fœneratori debeat.

Adde 10 ad 100 fiunt 110; deinde per regulam auream dic, si aurei 100 fiunt 110, seu si 10 fiunt 11, quid 500? invenies 550, hoc est 500 pro sorte, pro usura vero primi anni 50. Rursus pro secundo anno dic, si 10 fiunt 11, quid 550? fiunt 605. Demum si 10 dant 11, quid 605? Invenies summam a Cajo solvendam, aureos $665\frac{1}{2}$.

Vel brevius, duc 500 in 1331, hoc est in $11 \times 11 \times 11 = 1331$, & productum 665500, divide per 1000, nimirum per $10 \times 10 \times 10 = 1000$, quotus dat $665\frac{1}{2}$, ut antea.

COROLL. Hinc liquet, sortem datam, nempe aureos 500, & summas deinde inventas per regulam proportionum 550, 605, & $665\frac{1}{2}$ esse terminos continue proportionales, cum omnes sint in eadem proportione, quam habet 10 ad 11; proinde inter sortem datam, & ultimi termini summam tot intercedunt medii proportionales, quot ejus fœnoris fuerunt anni. Hoc ipsum de præcedenti quæstione debet intelligi.

SCHOL. *Praxis hujusmodi, quæ apud Latinos anatocismus, sive usura usuræ, & a nonnullis usura Judaica dicitur, est a lege vetita. Ab Italis vocari solet meritum meriti, seu* meritare a capo d'anno. *Hac vero regula utimur, ubi fundus ex annuis fructibus continuo augeri, ac multiplicari debet.*

6. Terentius debet Gellio pro usura primi anni summam sortis, & fœnoris simul scuta 4608, pro quarto autem anno scuta 6561; quæritur, quanta fuerit sors, quantumque fœnus.

Quærantur inter 4608, & 6561 duæ mediæ proportionales, *per Prop. 12. hujus*: duc scilicet minorem 4608 in se, fit quadratum 21233664, quo ducto in majorem 6561, producitur 139314069504. Hinc autem extrahatur radix cubica, *per Prop. 3. Cap. 4.* prodibit 5184, quæ erit duarum proportionalium minor, *per Propos. 12. cit.* Solvet igitur secundo anno pro sorte, ac fœnore scuta 5184: atque hinc deducitur sortis quæsitæ quantitas. Nam *ex præc. Coroll.* sortis summa, & reliquæ omnes, sunt

ſunt inter ſe in proportione continua; proinde ſecundi anni ſumma 5184 ſe habet ad ſummam 4608 primi anni, ſicuti hæc ad ſortem quæſitam. Datis itaque duobus terminis 5184, & 4608, quæratur tertius proportionalis per *Propoſ.* 10. *hujus*, erit ſors quæſita 4096.

Hanc ſubtrahe ex ſumma data ſortis, & fœnoris primi anni, nempe ex 4608, innoteſcet ejuſdem ſortis uſura, ſcutorum ſcilicet 512, ſeu $12\frac{1}{2}$ ex ſingulis 100. Nam dic, ſi ſcuta 4096 fiunt 4608, quid 100? invenies $112\frac{1}{2}$, hoc eſt $12\frac{1}{2}$ ex ſingulis centenis.

CAPUT VI.

De Progreſſionibus Arithmeticis, & Geometricis, earumque regulis.

Progreſſio eſt plurium terminorum eadem continua proportione procedentium. Quia vero proportionalitas alia eſt Arithmetica, in qua termi ni æquali exceſſu, vel defectu ſe ſuperant, ut 1, 3, 5, 7, 9, 11, qui binario numerio creſcunt, vel 15, 12, 9, 6, 3, qui ternario decreſcunt; alia eſt proportionalitas Geometrica, in qua termini ſimili ratione creſcunt, vel decreſcunt, quatenus primus toties ſecundum continet, quoties ſecundus tertium, & ſic deinceps, ut in *præc. Cap.* fuſe explicavimus: proinde progreſſio duplex eſt, alia Arithmetica, alia Geometrica. In prima termini ſervant proportionem Arithmeticam, in ſecunda Geometricam. Regulæ autem Progreſſionum, de quibus in præſenti agimus, conſiſtunt in hoc, ut talium progreſſionum termini in unam ſummam ſine prolixæ calculationis tædio compendioſe, ac facile colligantur. Nos de utraque hic breviter tractabimus.

Præter Arithmeticam, & Geometricam proportionalitatem, datur quoque proportionalitas Harmonica, ſeu Muſica, in qua tres numeri ita ordinantur, ut eadem ſit proportio maximi ad minimum, quam habet differentia maximi & medii ad differentiam medii & minimi. Tales ſunt numeri 3, 4, 6; nam inter 6 & 3 eſt proportio dupla; ſicuti dupla eſt proportio differentiæ inter 6 & 4, nempe 2, ad differentiam inter 4 & 3, nempe 1.

LEMMATA.

I. In progreſſione Arithmetica terminorum quorumcunque, ſumma duorum extremorum æquatur ſummæ duorum terminorum, qui ab extremis æqualiter diſtant. Sint 1, 3, 5, 7, 9, 11.

Erit $1 + 11 = 3 + 9$. Item $5 + 7$... Item $1 + 11 = 5 + 7$.

II. In progreſſione Arithmetica terminorum imparium ſumma extremorum, vel duorum terminorum æqualiter diſtantium, dupla eſt termini medii.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.

In hac progreſſione ſeptem terminorum ſumma $1 + 13 = 7 + 7$, ſeu 14. Item $3 + 11 = 14$, pariter $5 + 9 = 14$.

III. In

III. In omni progreſſione Arithmetica quilibet terminus continet primum, hoc eſt minimum terminum, & toties exceſſum, ſeu differentiam una minus, quot ſunt termini poſt primum uſque ad ipſum incluſive. Sint

1, 3, 5, 7, 9, 11.

Terminus quartus progreſſionis 7 continet, ut patet, minimum terminum 1, & ter differentiam 2. Pariter 9, terminus quintus progreſſionis, continet 1, & quater differentiam ipſam 2. Ita quoque 11, terminus progreſſionis ſextus, continet 1, & quinquies differentiam 2 ut patet.

Coroll. Hinc habetur maximus progreſſionis terminus, ſi differentia ducatur in numerum terminorum unitate minutum, & producto addatur minimus terminus. Sic in præc. progreſſione, ſi differentia 2 ducatur in 5 (numerum terminorum unitate minutum) & producto addatur minimus terminus 1, habetur maximus terminus 11.

PROPOSITIO I.

Datis minimo ac maximo progreſſionis Arithmeticæ terminis, & terminorum numero, invenire ſummam.

Regula hæc eſt: ſumma minimi ac maximi termini multiplicetur per dimidium numerum terminorum, productum dabit ſummam totius progreſſionis.

Sit exemplum. Quæritur ſumma omnium campanæ pulſuum alicujus horologii Italici ab 1 hora, uſque ad 24 incluſive. Minimus terminus eſt 1, & maximus 24; horum ſumma 25 ducatur in 12, dimidium terminorum, productum 300 dat omnes campanæ horariæ pulſus unius diei.

Ratio deducitur ex *lemm.* 1. Nam cum ſumma extremorum æqualis ſit duobus quibuſque terminis æqualiter diſtantibus, rectangulum factum ex ſumma primi, & ultimi in numerum dimidium terminorum, neceſſario æquale erit ſummæ totius progreſſionis. Multiplicatio enim eſt idem ac compendioſa additio ex dictis *Prop.* 5. *Cap.* 1.

Coroll. Hinc infertur, ſummam progreſſionis Arithmeticæ pariter haberi, 1. Si dimidium ſummæ minimi, ac maximi termini ducatur in numerum terminorum. 2. Si ſumma minimi, & maximi ducatur in numerum terminorum, & productum per 2 dividatur. 3. Quia vero in progreſſione terminorum imparium numerus medius æquatur dimidio ſummæ minimi ac maximi ex *lem.* 2, hinc ſequitur, haberi progreſſionis ſummam, ſi numerus medius ducatur in numerum terminorum imparium.

PROPOSITIO II.

Datis terminis maximo, & minimo, necnon & numero terminorum, differentiam invenire.

A Maximo termino aufer minimum, & residuum divide per numerum terminorum unitate minutum, quotus dabit differentiam quæsitam.

In præc. exemplo campanæ horariæ a maximo termino 24 aufer minimum 1, & residuum 23 divide per numerum terminorum unitate minutum, nempe 23; quotus 1 dat differentiam quæsitam.

Ratio desumitur ex *lemm.* 3. Nam 24 continet minimum terminum 1, & præterea toties continet differentiam, quot sunt post terminum 1 usque ad ipsum inclusive 24 termini, qui nimirum sunt 23: proinde, ablato minimo termino, residuum continet toties differentiam, quot sunt progressionis termini minus uno; adeoque diviso residuo per numerum terminorum unitate minutum habetur differentia.

PROPOSITIO III.

Minimo termino, differentia, & numero terminorum datis, invenire maximum.

DUC differentiam in numerum terminorum unitate minutum, & producto adde minimum terminum, summa dabit maximum.

Sit exemplum. Dux exercitus distribuere vult prædam in expugnatione Urbis collectam inter 40 strenuos milites, qui primi arcem occuparunt, hoc pacto, ut ultimo, qui mœnia superavit, dentur aurei 100, penultimo 130, antepenultimo 160, & sic deinceps: quæritur, quantum retulerit pecuniæ primus. Patet minimum terminum esse 100, differentiam 30, & numerum terminorum 40. Duc proinde 30 in 39, & producto 1170 adde minimum terminum 100, habebis maximum 1270, præmium scilicet primi militis. Ratio patet ex *lemm.* 3, *ejusque Coroll.*

PROPOSITIO IV.

Minimo & maximo, necnon & differentia datis, numerum terminorum invenire.

A Maximo aufer minimum, & residuum divide per differentiam, quotus unitate auctus dat numerum terminorum.

Sit exemplum. Empta est multitudo librorum hac conventione, ut minimus liber stet juliis 2, secundus juliis 4, tertius 6 &c., ultimi vero libri pretium fuit juliorum 400, quæritur librorum numerus. Aufer minimum 2 à maximo 400, & residuum 398 divide per differentiam 2, quotus 199 unitate auctus, hoc est 200, est numerus terminorum, seu librorum, qui quæritur.

Similiter artifex de opere perficiendo convenit hoc pacto, ut primo die solvantur sibi asses 20, secundo die asses 25, tertio asses 30, & sic deinceps. Ultimo

O 2 die,

die, quo opus absolvit, accepit asses 165, quæritur quot dies operi insumpserit. Aufer terminum minimum 20 à maximo 165, & residuum 145 divide per differentiam 5, quotus est 29, qui unitate auctus dat dies 30.

Ratio propositionis desumitur ex *lemm.* 3, ut manifestum est.

De Progressionibus Geometricis

LEMMA IV.

In omni progressione Geometrica si terminus quilibet in se ducatur, & productum dividatur per terminum primum progressionis, quotus distabit à primo termino locis duplo pluribus, quam ipse terminus.

In progressione *A* terminus 8 tertio loco positus, qui duobus locis distat a primo, ducatur in se, & productum 64 dividatur per primum terminum 2, quotus 32 distabit à primo termino locis duplo pluribus, seu quatuor. Nam terminus 32 est tertius proportionalis ad duos terminos 2, & 8, per *Propos.* 9. *Cap.* 5. proinde 32 toties continet 8 (hoc est bis terminum intermedium 16) quoties 8 continet primum 2, nempe bis terminum intermedium 4; adeoque cum 32 tantundem distet ab ipso 8, quantum 8 a termino primo 2 (duobus scilicet locis) distabit ipse 32 à primo termino locis duplo pluribus, nempe quatuor.

A 2, 4, 8, 16, 32, *&c.*
0. 1. 2. 3. 4.

Co-

Coroll. Hinc sequitur, quod si cuilibet progressioni Geometricæ subscribantur numeri ordine naturali ab unitate, facto tamen initio à cyphra; quilibet progressionis terminus, qui producitur per alium in se ductum, & divisum à primo, habeat sub se notam duplo majorem, quam terminus à quo producitur. Sic in superiori exemplo terminus 32 habet sub se notam 4, duplam ejus quam habet 8, ex cujus ductu producitur. Tales enim numeri, qui *exponentes*, *vel indices* progressionis dicuntur, indicant quantum quisque terminus distet à primo. Locum autem, seu numerum terminorum progressionis indicant unitate minorem. Sic 32, cujus index est 4, est quintus in progressione terminus. Quod notetur.

LEMMA V.

In omni progressione geometrica si duo quilibet termini in se ducantur, & productum dividatur per primum terminum progressionis, quotus dabit terminum tot locis distantem a primo, quot unitates habent indices duorum illorum terminorum simul additi.

In Progressione Geometrica *B* subscribantur numeri ordine naturali ab unitate, ut dictum est in *præc. Coroll.* & duo quilibet termini 10 & 40, quorum indices simul additi dant 4, ducantur inter se, eorumque productum 400 dividatur per primum 5, quotus est 80, cujus index pariter est 4, adeoque quatuor locis distat a primo termino per *Coroll. cit.*

B 5, 10, 20, 40, 80, 160 *&c.*
0. 1. 2. 3. 4. 5.

Co-

Coroll. Hinc ad inveniendum quemlibet progressionis datæ terminum, v. g. sextum, multiplicari debent inter se duo termini, eorumque productum dividi per primum, ita ut eorum indices additi contineant tot unitates una minus, quot habet terminus quæsitus. Sic ad inveniendum sextum progressionis *B* terminum, ductis inter se 20 & 40 (quorum indices additi dant 5) & producto diviso per 5, quotus 160 erit sextus progressionis terminus, ut patet.

PROPOSITIO V.

Datis minimo & maximo progressionis Geometricæ terminis, ac denominatore, summam terminorum invenire.

A Maximo termino aufer minimum, & residuum divide per denominatorem proportionis unitate minutum, additoque quotienti ultimo termino, habebis omnium terminorum summam.

Sit exemplum. Venditur equus eximiæ pulchritudinis hoc pacto, ut juxta clavorum numerum, qui in soleis ferreis figendis adhiberi solent, solvatur pro primo clavo 1 assis, pro secundo clavo asses 2, pro tertio 4, & sic deinceps in proportione dupla. Clavus ultimus importat asses 2147483648. Quæritur assium omnium solvendorum summa.

Aufer minimum terminum 1 ab ultimo, & residuum divide per denominatorem 2 unitate multatum, nempe per

per 1; & quia unitas non dividit, remanet quotus idem ac residuum 2147483647, cui adde ultimum terminum, fiet totius progressionis summa 4294967295: qui asses si dividantur per 100, erit pretium illius equi scutorum 42949672, & asses 95, *per Schol. Prop. 5. Cap. 3.*

Ratio deducitur ex *Prop. 34. lib. 9. Eucl.* Nam in omni finita progressione Geometrica, ut denominator unitate multatus est ad unitatem, ita maximi & minimi differentia (seu maximus terminus, dempto minimo) est ad totam progressionis summam, minus ipsomet maximo termino; ut si fuerit progressio Geometrica in proportione tripla 3, 9, 27, 81, 243, erit denominator 3 unitate multatus, seu 2 ad 1, sicuti 243 — 3, seu 240, ad totam progressionis summam, dempto maximo termino, hoc est ad 3 + 9 + 27 + 81 = 120; proinde diviso 240 per 2, habetur 120, cui additur ultimus terminus 243, ut habeatur totius progressionis summa 363.

Schol. I. *Progressionis duplæ ab unitate incipientis brevius habetur summa, si duplicetur terminus ultimus, & a duplo auferatur unitas. Sic in priori exemplo duplica ultimum terminum* 2147483648, *ac deme unitatem, residuum dabit summam totius progressionis* 4294967295, *ut antea. Ratio per se manifesta est, quia denominator unitate multatus est unitas, quæ non dividit; & addere quoto ultimum terminum in hoc casu idem est, ac illum bis sumere, seu duplicare.*

Schol. II. *Ex progressione dupla ab* 1 *incipiente* 1, 2, 4, 8, 16 *&c. habentur numeri, qui dicuntur* Perfecti, *qui scilicet omnibus suis partibus aliquotis æquales sunt, ut* 6, *ut* 6, 28, 496 *&c. hoc pacto: adduntur ordinatim progressionis duplæ termini, donec eorum summa sit numerus primus, ut* 1+2=3, 1+2+4=7, 1+2+4+8+16=31. *Tum numerus primus* 3, *vel* 7, *vel* 31 *ducitur in numerum ultimo additum, ex producto oritur numerus perfectus. Sic* 3×2=6, 7×4=28, 31×16=496. *Et sic de aliis*.

PROPOSITIO VI.

Datis aliquot progressionis Geometricæ terminis, quemcunque alium, etiam mediis non cognitis, invenire.

DAti sint aliqui termini Geometricæ progressionis *A*, & inveniendus sit ejusdem terminus v. g. vigesimus. Hujus index erit 19, nimirum unitate minor numero termini quæsiti, per *Coroll. lemm.* 4. Subscribe terminis datis numeros naturales ab unitate, facto initio a cyphra, per *Coroll. cit.*, & duc 80, qui in progressione quintum locum occupat, & distat a primo locis 4, in se ipsum, ejusque productum 6400 divide per primum terminum 5, quotus 1280 distabit a primo termino locis duplo pluribus, quam ipse 80, hoc est locis 8 per *lemm.* 4.

Eadem ratione duc 1280 in se ipsum, & productum divide per 5, quotus 327680, distabit a primo termino locis duplo pluribus, hoc est 16 per *lemm. cit.* Cum autem index 16 ab indice termini quæsiti 19 differat per defectum 3, duc 327680 per terminum, cujus index sit 3, hoc est per 40, & productum divide per 5, quotus 2621440 erit terminus vigesimus quæsitus.

Nam cum ex constructione terminus 2621440 sit productus ex duobus terminis 327680, & 40, quorum indices sunt 16 & 3, seu 19, & divisus sit per primum terminum 5, distabit tot locis a primo termino, quot unitates habent duorum illorum terminorum indices 16, & 3 *per lemm.* 5, hoc est locis 19; adeoque ejus index erit 19, proinde terminus in progressione vigesimus *per Coroll. lemm.* 4. Quod erat &c.

COROLL. Patet idem esse quærere datæ progressionis terminum 20, ac terminum exponentis, seu indicis 19, unitate minoris termino quæsito.

PROPOSITIO VII.

Afferuntur nonnullæ Progressionis Geometricæ quæstiones.

1. QUæritur, quantum frumenti ex uno tritici grano haberi possit annis 10, si supponatur ab uno grano produci posse singulis annis grana 100, licet revera multo plura produci soleant.

Illa ergo 100 grana secundo anno producent centies centum grana, nempe 10,000, & sic deinceps in proportione centupla. Inveniatur hujus progressionis decimus, seu ultimus terminus, qui *per Propos. præc.* erit 10000,0000,0000,0000,0000, hoc est unitas cum cyphris 20. A quo si auferatur minimus terminus 100;

& residuum dividatur per denominatorem proportionis unitate minutum, hoc est per 99, & addatur quoto ultimus terminus supra inventus, erit omnium granorum summa *per Propos.* 5.

1000000000111111111000.

Quam nec totius Europæ horrea caperent. Ponamus enim ad unam Romanæ libræ unciam requiri grana 600; ad libram unciarum 12 requiruntur grana 7200. Cum autem Romanum (ut vocant) Rubium sit pondo librarum 640, requiruntur ad rubium unum grana 4608000; dividatur per hunc progressionis summa, dabit quotus rubiorum numerum.

2. Rex, cui ex annuo redditu proveniunt ter decies centena millia nummorum argenteorum, statuit ejusmodi redditus alicui ministro locare hoc pacto, ut singulis annis per unum mensem solvat sibi primo die assem 1, secundo die asses 2, tertio vero 4, in proportione dupla diebus 30, quæritur summa solvenda regi.

Inveniatur progressionis duplæ ab 1 incipientis terminus 30 per *Propos. præc.* erit 536870912, qui duplicetur, & a duplo auferatur unitas; erit assium summa 1073741823, per *Schol.* 1. *Propos.* 5. Ex qua resectis ad dexteram duabus notis, habetur nummorum argenteorum summa.

3. Scheramus Indiæ rex proposuit Sessæ Dahir Indo, qui latrunculorum ludum a se inventum illi exposuerat, ut in proemium peteret quantum vellet. Ille vero nihil aliud petiit, quam ut tritici granum prima areola positum continue duplicaretur, donec ad ultimam 64 perventum fuisset. Levissima regi primum visa res est: sed facto computo ab Arithmeticis, inventum est, neque in ejus regno, neque in toto terrarum Orbe reperiri eam tantam tritici copiam, nempe 18446744073709551615. Hoc patet ex dictis per *Prop.* 5. & 6. *hujus*.

SCHOL. I. *Hanc doctrinam qui noverit, haud mirabitur id, quod sacra historia narrat de multitudine filiorum Israel, qui egressi sunt de Aegypto. Cum enim eo profecti essent non plures, quam 70, ita multiplicati sunt, ut post annos* 120, *inde exierint ad sexies centena millia bellatorum hominum, præter pueros, senes, ac mulieres.*

SCHOL. II. *Admiranda Geometricæ progressionis duplæ ab* 1 *incipientis usque ad terminos* 124 *inclusive incrementa, quot scilicet scalarum gradibus Romæ ad templum Aracœlitanum ascenditur, prosecutus est integro libro Romæ edito an.* 1652. *Fr. Ludovicus Paris de Monte Fano Min. Observ., in quo tot, ac tam lepida congerit, ut nescias, utrum magis Geometricæ progressionis incrementa, an hominis ingenium, vel otium mireris.*

SCHOL. III. *De progressione Geometrica infinita per infinitos terminos descendentis non loquimur, quod hæc tyronis Arithmetici studium transcendat, & per Analysin ea longe facilius explicetur.*

PROPOSITIO VIII.

Ex dato rerum numero combinationes omnes invenire.

COmbinatio rerum fieri dicitur, cum dato certo rerum numero, v. gr. octo alphabeti literis, quæritur quoties illæ bis, ter, vel quater inter se valeant combinari; hoc est quot binarii, quot ternarii, aut quaternarii ex illis fieri possint.

1. Datæ sint igitur octo res, seu literæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, scire volo omnes binorum combinationes. Instituantur duæ progressiones Arithmeticæ naturales descendentes, subducta unitate a numeris 8 & 2, tot scilicet terminorum, quot numerus minor 2 (qui denominator combinationis binariæ dicitur) continet unitates, ut in *A* & *B* factum est. Ducantur deinde inter se 8 & 7, & productum 56 dividatur per productum 2 × 1, hoc est per 2, quotus 28 dat quæsitam binorum multitudinem.

A	*B*
2	8
1	7
2	56 (28

Hoc patet ex sequenti 8 literarum combinatione.

ab	*ac*	*ad*	*ae*	*af*	*ag*	*ah*
bc	*bd*	*be*	*bf*	*bg*	*bh*	
cd	*ce*	*cf*	*cg*	*ch*		
de	*df*	*dg*	*dh*			
ef	*eg*	*eh*				
fg	*fh*					
gh						

II. Sci-

II. Scire volo quot ternorum combinationes ex iisdem 8 literis haberi possint. Instituantur, ut supra factum est, duæ progressiones Arithmeticæ descendentes *C* & *D*, & productum 336 dividatur per productum 6, quotus 56 dat numerorum ternorum, qui petitur.

C	D
3	8
2	7
1	6
6	336 (56

COROLL. Eadem methodo inveniuntur omnes quaternarii, quinarii, senarii &c. ex dato numero. Proinde in ludo Romano, qui vulgo *Lotto* dicitur, in quo puellarum 90 nomina in urnulam mittuntur, ut inde quinque tantum sortito extrahantur, binarii *per hanc Propos.* inventi erunt 4005, ternarii 117480, quaternarii 2555190, quinarii 43949268; unde difficillima in hujusmodi ludis divinandi ratio satis apparet.

PROPOSITIO IX.

Ex dato rerum numero permutationes omnes possibiles invenire.

PErmutationes, quas datus rerum numerus subire potest, inveniuntur hoc pacto.

Sumantur tot numeri in serie naturali 1, 2, 3, 4 &c. quot sunt res datæ, v.g. quinque literæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, productum ex terminis seriei naturalis invicem multiplicatis erit numerus permutationum quæsitus, ut in *A* & *B* patet. Nam si dentur duæ tantum literæ *a*, *b*, possunt bis permutari, si quælibet semel primum locum, vel secundum occupet, ut *ab*, *ba*. Si dentur tres

tres *a*, *b*, *c* permutari possunt sexies. Quælibet enim occupare potest semel unum locum, & reliquæ duæ, ut modo dictum est, bis permutari. Nam cum *c* tenet ultimum locum, possunt duæ reliquæ *a*, *b*, mutari bis, ac proinde habentur duo diversi ordines *abc*, *bac*. Rursus *b* occupante ultimum locum, permutari possunt bis duæ *a*, *c*; & sic duo novi exurgunt ordines *acb*, *cab*. Denique si *a* teneat ultimum locum, reliquæ duæ *c*, *b* bis permutari valent, unde rursus alii duo habentur ordines *bca*, *cba*. En simul omnes trium literarum *a*, *b*, *c* permutationes.

A	*B*
1	*a*
2	*b*
3	*c*
4	*d*
5	*e*
120	

abc, *acb*, *bca*,
bac, *cab*, *cba*.

Eodem discursu ostenditur literas quatuor *a*, *b*, *c*, *d*, permutationes 24 admittere; literas quinque *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, permutationes 120 &c.

Coroll. I. Hinc patet celebre illud carmen in honorem B. M. V.

Tot tibi sunt Virgo dotes, quot sydera Cælo.

octo verbis constans, subire posse permutationes 40320.

Coroll. II. Hinc quoque habentur omnia dati nominis Anagrammata, seu quot modis, variato ordine, disponi possint alicujus vocabuli literæ, ut *Roma*; cujus anagrammata sunt *Amor*, *Mora*, *Maro*, *Ramo*, *Armo* &c.

Schol. *Quod si in dato vocabulo duæ sint literæ eædem, ut in voce* Paulus, *in qua bis reperitur* u; *permutationum numerus, ut supra, inventus dividatur per numerum permutationum, quas subire possunt literæ, seu res similes, quotus dabit numerum permutationum quæsitum. Sic ejusdem vocis literæ, seu Paulus, subirent permutationes* 720: *duæ sunt literæ similes, quæ admittunt permutationes* 2; *dividatur itaque* 720 *per* 2, *quotus* 360 *dat permutationum numerum.*

PROPOSITIO X.

Proponuntur aliqua Permutationum problemata.

I. Sunt Convictores 12, qui communi mensa utuntur, & quotidie singuli accumbendi locum varíant, quæritur, quot annis absolvetur isthæc locorum permutatio.

Ductis invicem 12 progressionis naturalis Arithmeticæ numeris 1, 2, 3 &c. invenietur per *Prop. præc.* permutationes 479, 001, 600, quas si dividas per dies 365 habebis annorum summam.

2. Facta literarum 24 alphabeti permutatione, quæritur, quot annorum millia necessaria erunt ad omnes ejusmodi permutationes scribendas, etiamsi mille scriptores existant, qui quotidie paginas 40 scribant.

Inveniatur *per Propos. præc.* permutationum summa ex literis 24, quæ ex Tacquet est 620, 448, 401, 733, 239, 439, 360, 000. Duc 40 in 1000, productum 40, 000 dat numerum paginarum singulis diebus scribendum. Duc deinde 40, 000 in dies 365, & per productum 14, 600, 000 divide prædictam permutationum summam, quotus dabit numerum annorum quæsitum.

3. Ex

3. Ex doctrina B. Alberti Magni de Angelorum numero, Angelorum ordines, seu chori sunt 9: quilibet chorus continet 6666 legiones, & legio quælibet Angelos 6666, proinde omnium Angelorum numerus est 399, 920, 004; quæritur quot fieri possint Angelorum permutationes, seu quot modis ordinem inter se variare valeant. In hoc tam infinitæ multitudinis numero percipiendo, imbecilla mens hominum deficit.

PROPOSITIO XI.

Datis tribus numeris Arithmetice proportionalibus, tres numeros Harmonice proportionales invenire.

1. Ducatur primus Arithmetice proportionalis datus in secundum, productum erit primus proportionalis Harmonice.

2. Ducatur idem primus Arithmetice proportionalis in tertium, proveniet secundus Harmonicus.

3. Denique secundus Arithmeticus in tertium ductus tertium Harmonicum producet.

Sit exemplum. Proportio Arithmetica 2, 3, 4, efficit Harmonicam 6, 8, 12.

Similiter proportio Arithmetica 3, 7, 11. efficit Harmonicam 21, 33, 77.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Datis duobus numeris tertium Harmonice proportionalem invenire.

DUC primum numerum datum in secundum, & productum divide per duplum primi minutum secundo, hoc est per differentiam dupli primi a secundo, quotus erit tertius harmonice proportionalis.

Dati sint 3 & 4, quæritur tertius in eadem ratione harmonica. Duc 3×4, & productum 12 divide per $6 - 4$, hoc est per 2, quotus 6 dat numerum quæsitum. Similiter dati sint 6 & 8, quæritur tertius harmonicus. Duc 6×8, & productum 48 divide per $12 - 8$, seu 4, quotus 12 est tertius harmonice proportionalis, ut patet ex dictis.

PROPOSITIO XIII.

Si numerus datus dividatur per numeros Arithmetice proportionales, quotientes erunt in Harmonica proportione.

Datus sit numerus ex. gr. 60, qui dividatur per numeros Arithmetice proportionales 1, 2, 3, 4, 5, 6, erunt quoti 60, 30, 20, 15, 12, 10: quos esse in proportione harmonica manifestum est. Nam

$$60 . 20 :: 60-30 . 30-20.$$
$$30 . 15 :: 30-20 . 20-15.$$
$$20 . 12 :: 20-15 . 15-12.$$
$$15 . 10 :: 15-12 . 12-10.$$

Q Hinc

Hinc patet haberi progressionem terminorum harmonice proportionalium.

SCHOL. I. *Harum trium propositionum demonstrationes ad Analysin speciosam remittimus, unde facillime eruuntur, quæ alioquin per viam syntheticam sunt operosæ.*

SCHOL. II. *Ratio autem cur tales numeri proportionem harmonicam, seu Musicam constituere dicantur, est nimirum quia consonantias Musicas constituunt. Sic in numeris harmonice proportionalibus 3, 4, 6 inter 6 & 4 est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ* Diapente, *seu* Quinta *dicitur. Item inter 4 & 3 est proportio sesquitertia, constituens consonantiam, quam* Diatesseron, *seu* Quartam *vocant. Denique inter extremos 6 & 3 habetur proportio dupla, quæ* Diapason, *seu* Octavam *consonantiam efficit.*

SCHOL. III. *Datur etiam proportio* Contr-harmonica, *quæ habetur, cum datis tribus terminis, differentia primi, & secundi est ad differentiam secundi, & tertii, ut tertius terminus ad primum. Sic 3, 5, 6 sunt numeri contrharmonice proportionales: nam 2, differentiam primi, & secundi termini, est ad 1, differentiam secundi, & tertii, ut 6 ad 3. Item 12, 10, 6 sunt contrharmonice proportionales; nam 2 . 4 :: 6 . 12. Hæc dicta sint in gratiam eorum, qui Musicam amant, aut instrumentis Musicis student, ut hinc numerorum scientiam sibi maxime necessariam intelligant.*

APPENDIX

De Logarithmis, eorumque natura, atque usu.

CUM triangulorum resolutio, quæ per sinus, tangentes, & secantes habetur, absolvi debeat per regulam Proportionum, in qua multiplicatio, & divisio, ob numeros septem, vel octo characteribus constantes, multum laboris, & tædii importare solet; hinc est, quod Joannes Neperus Scotus, vir numquam satis laudandus, alios numeros pro sinibus, tangentibus, & secantibus excogitavit, & anno 1620 promulgavit, quorum ope sola additio præstat omne id, quod præstare solebat multiplicatio, & subtractio idem efficit, quod divisio. Tales numeri vocantur *Logarithmi*, quorum naturam, proprietates, & usum hic brevissime explicamus.

LEMMATA.

I. IN progressione Arithmetica quatuor terminorum summa duorum extremorum æquatur mediorum summæ. Sint quatuor termini dati 1, 2, 3, 4; erit $4 + 1 = 2 + 3$.

COROLL. I. Hinc ut habeatur quartus Arithmetice proportionalis, ex summa secundi, & tertii termini aufertur terminus primus, residuum dat quartum Aritmetice proportionalem quæsitum.

II. In progreſſione Arithmetica trium terminorum, ſumma duorum extremorum æquatur duplo termini medii. Dati ſint 2, 5, 8, erit $2 + 8 = 10$.

COROLL. I. Hinc datis duobus terminis Arithmetice proportionalibus, ut habeatur tertius, ex duplo ſecundi aufertur primus. Sic $10 - 2 = 8$.

COROLL. II. Inter duos datos numeros medius Arithmetice proportionalis habetur, ſi accipiatur eorum ſummæ ſemiſſis. Sint dati 2 & 8, eorum ſummæ ſemiſſis 5 eſt medius Arithmetice proportionalis, ut patet.

PROPOSITIO I.

De natura Log-morum, eorumque inventione.

LOg-mi ſunt numeri Arithmetice proportionales adjuncti, ſeu reſpondentes numeris Geometrice proportionalibus: vel ſunt numeri, qui Arithmeticam, ubi ii, quorum iſti ſunt Log-mi, Geometricam ſervant proportionem. Ut ſi concipiatur ſeries quæcunque numerorum Geometrice proportionalium, ut in *A*, cui reſpondeat alia ſeries numerorum Arithmetice proportionalium *B*, vel *C*, vel *D*, qui creſcant ut in *B*; & *C*, vel decreſcant, ut in *D*; omnes hi numeri *B*, *C*, *D* dicuntur Log-mi numerorum in *A* exiſtentium.

A	*B*	*C*	*D*	*M*	*N*
1	1	3	100	1	0.0000000
2	2	5	90	10	1.0000000
4	3	7	80	100	2.0000000
8	4	9	70	1000	3.0000000
16	5	11	60	10000	4.0000000
32	6	13	50	100000	5.0000000
64	7	15	40	1000000	6.0000000
128	8	17	30	10000000	7.0000000
256	9	19	20	100000000	8.0000000
512	10	21	10	1000000000	9.0000000
1024	11	23	0	10000000000	10.0000000

Quamvis autem Log-morum ſpecies poſſit aſſumi ad libitum, ut diximus, præſtantiſſima tamen, & commodiſſima eſt illa, quæ cyphram, ſeu o ponit pro Log-mo unitatis, & unitatem cum aliquibus cyphris, nempe octo, vel ſeptem pro Log-mo numeri denarii, ut vides in *M* & *N*. Adduntur numeris in progreſſione Arithmetica procedentibus, ſeu Log mis illæ cyphræ, ut Log-mi magis exacti habeantur, ut dicitur in Trigonometria de ſinu toto reſpectu ſinuum, tangentium, & ſecantium, utque calculus facilior evadat.

COROLL. I. Ex eo quod Log-mus unitatis ſit o, ſequitur Log-mum numeri, qui ſit minor unitate, ut ſunt fractiones, minorem eſſe quam o, qui proinde dicitur Log-mus *defectivus*, & deſignatur nota —

COROLL. II. Omnes Log mi numerorum ab 1 ad 10 excluſive habent o pro prima nota: qui ſunt inter 10, & 100 habent pro primo numero 1; qui vero ſunt inter

ter 100, & 1000 habent pro primo termino numerum 2, qui inter 1000, & 10000 habent 3 pro primo termino, & sic deinceps. Hi numeri initiales 1, 2, 3, 4, 5 &c. dicuntur *charaſteriſtici*, ſive *indicativi*: nam indicant quot figuris conſtat numerus abſolutus, cujus eſt Log-mus, & puncto ab aliis ſeparantur.

Coroll. III. Characteriſtica ſemper unitate minor eſt numero figurarum numeri abſoluti. Hinc dato quovis numero abſoluto v. g. 82050 quinque figurarum, ſtatim intelligitur ejus Log-mo deberi 4 pro characteriſtica, & ſic de aliis.

PROPOSITIO II.

Si Log-mus unitatis ſit 0, erit Log-mus facti æqualis aggregato ex Log-mis factorum.

Sit factum 24, cujus factores ſunt 4 & 6, erunt quatuor termini Geometrice proportionales, *ex Defin. multiplicat.*, 1. 4. : : 6. 24, eorumque Log-mi erunt in proportione Arithmetica, ex *Propoſ.* 1. Sed Log-mi extremorum 1, 24, æquantur Log-mis 4, 6, *per lem.* 1. Log-mus autem unitatis ex hypotheſi eſt 0; ergo ſi Log-mus unitatis ſit 0, Log-mus facti æquatur ſummæ ex Log-mis efficientium 4, & 6. Quod erat &c.

Coroll. I. Hinc ſequitur, Log-mum numeri compoſiti plani, ſeu ſolidi æqualem eſſe aggregato ex Log-mis laterum tale planum, vel ſolidum efficientium. Sic Log-mus 72 æquatur ſummæ Log-morum 3 & 24, aut 6 & 12, aut 8 & 9, vel 3, 4 & 6, vel etiam 2, 3 & 12, ex quibus omnibus conſurgit numerus 72. Co-

Coroll. II. Sequitur etiam, Log-mum numeri quadrati duplum eſſe Log-mi ejus radicis, & Log-mum cubi triplum Log-mi ſuæ radicis: nam factores quadrati, & cubi ſunt idem numerus bis, vel ter ſumptus.

Coroll. III. Si Log-mum dignitatis cujuſcunque x^2, x^3, x^4 &c. dividas per exponentem talis dignitatis, nempe per 2, vel 3, vel 4 &c. habebis Log-mum radicis ejuſdem dignitatis. Contra ſi Log-mum datæ radicis multiplices per exponentem alicujus dignitatis habebis Log-mum ejuſdem dignitatis. Sit $x^3 = 8$, ejuſque Log-mus ex tabulis 0.9030900: divide per exponentem 3 hunc Log-mum, quotus 0.3010300 erit Log-mus reſpondens radici 2; ſi vero Log-mum 0.3010300 multiplices per exponentem 3, habebis 0.9030900 Log-mum dignitatis x^3, ſeu cubi 8.

PROPOSITIO III.

Si Log-mus unitatis eſt 0, differentia Log-morum duorum numerorum æquatur Log-mo quoti eorundem numerorum.

Sint duo numeri 24 & 6, & differentia eorum Log-morum ſit 0.6020600, dico hanc eſſe Log-mum quoti eorumdem, nempe 4. Nam cum ſit diviſor ad dividendum, ex *Defin. diviſ.*, ut unitas ad quotum, erunt quatuor termini Geometrice proportionales 6. 24 : : 1. 4 eorumque Log-mi in proportione Arithmetica; ergo, per *lemm.* 1. *hujus*, Log-mi numerorum 24, & 1 æquantur

tur Log-mis extremorum 4 & 6; ſed ex hypotheſi Log-mus unitatis eſt 0, ergo ſi ex Log-mo numeri 24 auferatur Log-mus diviſoris 6, Log-mus reſiduus, ſeu differentia Log-morum 24 & 6, erit æqualis Log-mo quoti, nempe 0.6020600, qui reſpondet numero 4, nempe quoto. Quod &c.

COROLL. Hinc habetur, ſummam Log-morum diviſoris, & quoti æqualem eſſe Log-mo dividendi.

PROPOSITIO IV.

Numeri cujuſcunque Log-mum invenire.

INveniendus ſit Log-mus numeri 7. Statuatur progreſſio Geometrica 1, 10, 100, 1000 &c. & aſſumantur Log-mi his terminis reſpondentes 0.0000000, 1.0000000, 2.0000000, 3.0000000 &c. eo modo, quo dictum eſt in *Propoſ.* 1. *hujus*. Deinde unitatem *A*, & denarium *B* auge tot cyphris, quot placuerit, ut 7, 8, 9 &c. (hic cyphræ 6 adduntur) & inter *A* & *B* inveniatur medius proportionalis Geometricus *C*, *per Prop.* 11. *Cap.* 5. *Arithm.* erit hic minor numero ſeptenario, qui etiam intelligi debet auctus tot cyphris, quot aucta fuit unitas, nempe ſex. Inveniatur ergo inter *C* minorem,

A	1.000000	0.0000000
C	3.162278	0.5000000
B	10.000000	1.0000000
C	3.162278	0.5000000
D	5.623413	0.7500000
B	10.000000	1.0000000
D	5.623413	0.7500000
E	7.498942	0.8750000
B	10.000000	1.0000000

norem, & *B* majorem alius Geometrice proportionalis *D*, *per Propoſ. cit.*, qui pariter cum ſit minor, quam 7.000000, poterit inter ipſum *D* minorem, & *B* majorem inveniri medius Geometrice proportionalis *E*, nempe 7.498942, qui major eſt ipſo 7.000000; ideoque inter ipſum *E*, & proxime minorem *D* inveniatur medius Geometrice proportionalis *F*, qui minor eſt ipſo *E*; proinde inter *F* & *E* inveniri poteſt medius *G*, qui adhuc minor eſt ipſo *E*. Atque eadem ratione inquirendo inter proxime majorem, & proxime minorem, inveniuntur medii Geometrice proportionales *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* &c. donec tandem occurrat medius proportionalis $Z =$ 7.000000, qui nullo penitus exceſſu, vel defectu differt ab ipſo numero ſeptenario.

Deinde ſicuti inter *A* & *B*

D	5.623413	0.7500000
F	6.493816	0.8125000
E	7.498942	0.8750000
F	6.493816	0.8125000
G	6.978306	0.8437500
E	7.498942	0.8750000
G	6.978306	0.8437500
H	7.233942	0.8593750
E	7.498942	0.8750000
G	6.978306	0.8437500
I	7.104974	0.8515625
H	7.233942	0.8593750
G	6.978306	0.8437500
K	7.041355	0.8476562
I	7.104974	0.8515625
G	6.978306	0.8437500
L	7.009760	0.8457031
K	7.041355	0.8476562
G	6.978306	0.8437500
M	6.994015	0.8447266
L	7.009760	0.8457031
M	6.994015	0.8447266
N	7.001883	0.8452148
L	7.009760	0.8457031
M	6.994015	0.8447266
O	6.997936	0.8449707
N	7.001883	0.8452148

inventus fuit medius Geometrice proportionalis *C*, sic inter eorum Log-mos inveniatur medius Arithmetice proportionalis, *per Coroll. 2. lemm.* 2., nempe 0.5000000. Erit hic Log-us ipsius numeri *C*. Eodem modo reperiri debent omnes alii Log-mi mediis Geometrice proportionalibus *D*, *E*, *F*, *G* &c. respondentes: quo facto habebis Log-mum numeri dati 7, nimirum 0.8450980.

Coroll. Hac methodo inveniuntur Log-mi numerorum primorum 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 &c. Suppetunt tamen modi, quibus tantus labor imminuitur. Nam invento Log-mo numeri v.g. 9, si hunc dividas, semissis dat Log-mum numeri 3, *per Coroll.* 2 & 3. *Propos.* 2. *hujus*. Item invento Log-o numeri 6, habetur Log-us numeri 2, nam si dividas 6 per 3, quotus est 2; subtracto igitur Log-o numeri 3

O	6.997936	0.8449707
P	6.999915	0.8450928
N	7.001883	0.8452148
P	6.999915	0.8450928
Q	7.000899	0.8451538
N	7.001883	0.8452148
P	6.999915	0.8450928
R	7.000407	0.8451233
Q	7.000899	0.8451538
P	6.999915	0.8450928
S	7.000161	0.8451080
R	7.000407	0.8451233
P	6.999915	0.8450928
T	7.000038	0.8451004
S	7.000161	0.8451080
P	6.999915	0.8450928
V	6.999977	0.8450966
T	7.000038	0.8451004
V	6.999977	0.8450966
X	7.000007	0.8450985
T	7.000038	0.8451004
V	6.999977	0.8450966
Y	6.999992	0.8450975
X	7.000007	0.8450985
Y	6.999992	0.8450975
Z	7.000000	0.8450980
X	7.000007	0.8450985

a Log-o

a Log-o numeri 6, residuum dat Log-um quoti 2, *per Propos.3. hujus*. Pariter subtrahendo Log-um numeri 2 modo inventum a Log-o numeri 10, habetur Log-us quoti 5, *per Prop. 3. cit.*, & sic proportionaliter de aliis.

Coroll. Inventis Log-mis numerorum primorum, facile habentur Log-mi numerorum compositorum. Nam si Log-um binarii duples, triples, quadruples &c. habebis Log-mos totius seriei 2, 4, 8, 16, 32 &c. si idem facias cum Log-mo ternarii, habebis seriem Log-morum pro numeris 3, 9, 27, 81, 243 &c. Immo cum omnis numerus compositus oriatur ex multiplicatione numerorum primorum, quorum Log-mi supponuntur jam cogniti, si addas eorum Log-mos, habebis Log-os omnium numerorum compositorum, *per Prop.2. hujus*. Hinc omnes numeri in ratione decupla eundem habent Log-um, præter characteristicam, ut vides in *A* & *B*.

	A		*B*
1	0.0000000	3	0.4771212
10	1.0000000	30	1.4771212
100	2.0000000	300	2.4771212
1000	3.0000000	3000	3.4771212

Schol. *Canonem Log-morum pro numeris naturalibus, seu absolutis ab* 1 *usque ad* 20000, *&* *a* 90000 *usque ad* 100000 *primus construxit Henricus Briggius Anglus in Academia Oxoniensi ex consilio Jo: Neperi primi horum inventoris. Lacunam inter* 20000, *&* 90000 *mox implevit Adrianus Ulacq. In tabellis tamen vulgaribus habetur tantum canon Log-morum pro numeris ab* 1 *usque ad* 10000.

R 2 PRO-

PROPOSITIO V.

Multiplicare duos numeros, qui minores sint quam 10000.

SInt multiplicandi inter se duo numeri 144, & 64, quorum Log-i ex tabulis 2.1583625, & 1.8061800, quæritur factum. Adde simul duos Log-os inventos, summa dabit Log-mum 3.9645425, cui in tabulis respondet numerus 9216 pro facto duorum numerorum 144, & 64.

Demonstr. patet ex *Prop.* 2. *hujus*.

SCHOL. *Si summa duorum Logarithmorum superet* 4.0000000, *qui est maximus communium tabularum Log-mus, operandum erit, ut inferius docebimus*.

PROPOSITIO VI.

Numerum integrum minorem, quam 10000 *per alium dividere*.

SIT numerus dividendus 9216, cujus Log-mus ex tabulis est 3.9645425. Divisor sit 64, cujus Log-mus est 1.8061800, quæritur quotus. E Log-mo dividendi subtrahe Log-mum divisoris, Log-mus residuus, nempe 2.1583625, in tabulis quæsitus dat quotum 144.

Demonstr. patet ex *Prop.* 3. *hujus*.

SCHOL. *Cum Log mus ille residuus non invenitur in tabulis præcise, signum est, quoto minutiam aliquam adhærere, quæ quanta sit, reperietur, ut mox docebimus*.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Datis tribus numeris quartum proportionalem invenire.

SInt dati tres numeri 4, 68, & 3, quæritur quartus proportionalis. Log-mus secundi addatur Log-mo tertii, & a summa subtrahatur Log-mus primi. Log-us residuus dat in tabulis numerum quæsitum.

Demonstr. patet ex *lemm.* 1.

PROPOSITIO VIII.

Invenire Log-mum pro numeris majoribus, quam in canone continentur, sed numerum 10,000,000 *non excedentibus*.

SIT numerus datus 923754, cujus Log-mus quæritur.

1. Quære ex tabulis Log-mum quatuor primarum figurarum 9237, & ex residuis figuris fiat fractio, cujus denominator erit 1, cum tot cyphris, quot sunt ipsæ figuræ residuæ, nempe $\frac{54}{100}$.

2. Log-mus jam inventus subtrahatur a Log-mo proxime sequenti, nempe a Log-mo numeri 9238

Num. 9238, *Log.* 3.9655779
Num. 9237, *Log.* 3.9655309

Diff. Log. —— 470

3. Dic

3. Dic jam per regulam Proportionum, ut fractionis denominator 100 ad numeratorem 54, ita differentia Logmorum 470 ad quartum proportionalem 253 $\frac{80}{100}$.

4. Adde 253 (fractio negligi potest) Log mo primum invento, fiet Log-mus 3.9655562.

5. Tandem characteristica tot unitatibus augeatur, quot sunt cyphræ in divisore (ut hic 2) erit Log-mus quæsitus 5.9655562.

Demonstr. Certum est, quod si numerus 9237 cresceret integra unitate, ejus Log-mus augeri deberet partibus 470, qualis est differentia duorum Log-orum se integra unitate superantium: sed crescit tantum $\frac{54}{100}$, nam divisus per 100, quotus est 9237 $\frac{54}{100}$, ergo per regulam proportionum inquirendum est, quantum augeri debeat Log-mus ejusdem numeri 9237 ratione earum partium $\frac{54}{100}$, quæ quidem minus sunt, quam integra unitas, seu $\frac{100}{100}$. Instituta itaque regula proportionum, invenitur Logarithmum primo inventum, nempe 3.9655309, augendum esse partibus 253, fitque Logmus 3.9655562 pro numero 9237 $\frac{54}{100}$.

Demum characteristica 3 augeri debet tot unitatibus, quot cyphræ fuerunt in divisore (ut hic 2) ob divisorem 100. Nam numerus datus cum divisus sit per 100, est numerus quotus: sed *per Coroll. Prop. 3. hujus*, summa Log-morum divisoris, & quoti æqualis est Log-mo dividendi; ergo ut habeatur Log-us dividendi 923754 addi debet Log-o quoti 3.9655562 Log-us divisoris 100, nempe 2.0000000, quod, ut compendiosius fiat, satis est augere characteristicam duabus unitatibus, ut patet.

Coroll. Si daretur numerus major, quam 10,000,000 (quod

(quod in praxi vix contingit) hæc regula non sufficeret. Nam crescentibus numeris absolutis, differentiæ Logmorum decrescunt, ita ut tandem evanescant, & fiant omnino æquales ipsi Log-mi. Sic numeri 2656385774, & 2656385775, qui unitate differunt, habent eundem omnino Log-mum 9.4242911, ut ex tabulis majoribus Brigii apparet. Ideoque institui non posset regula proportionum, cum desit differentia Log-morum.

Coroll. Si numeri maximi non valde differunt, eorum Log mi supputati ad denarii Log-mum 1.0000000, ut in tabulis communibus factum est, sunt inter se æquales. Quapropter si daretur numerus quindecim, aut viginti figurarum, vel amplius, sufficeret pro ejus Log. mo sumere Log-um primarum decem figurarum, quod notasse valde utile erit.

Schol. *Si numerus datus dividi potest per quoscunque numeros, ita ut nihil remaneat, & fiat minor quam* 10000, *summa Log-morum divisoris, & quoti dat Log-mum numeri dati. Sit numerus datus* 12456, *divide per* 3, *fit* 4152, *adde simul Log-mos numeri* 3, *nempe* 0.4771212, *& Log-mum numeri* 4152, *nempe* 3.6182573, *summa* 4.0953785 *dat Log-mum dati numeri.*

Similiter sit numerus datus 98796, *divide per* 2 *fit* 49398, *& hunc iterum per* 2 *fit* 24699, *& hunc per* 3 *fit* 8233, *qui minor est quam* 10000; *adde simul Log-os omnium divisorum* 2, 2, 3, *seu (idem enim est)* per Coroll. 1. Propos. 2. hujus, *sume Log-mum numeri solidi compositi ex* 2, 2, 3, *id est* 12, *qui est* 1.0791812, *cui adde Log-mum ultimi quoti, nempe* 8233, *qui est* 3.9155581: *summa* 4.9947393 *est Log-mus dati numeri* 98796.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Datæ fractionis Log-mum invenire.

1. SUbtrahe Log-um numeratoris e Log-mo denominatoris, & residuo Log-mo præpone signum subtractionis. Sit inveniendus Log-mus fractionis $\frac{2}{5}$.

$$\begin{array}{rl} Log.\ 5. = & 0.6989700 \\ Log.\ 2. = & 0.3010300 \\ \hline Log.\ \frac{2}{5} = & -0.3979400 \end{array}$$

2. Si fractionis datæ numerator sit major denominatore, ut $\frac{9}{5}$ subtrahe Log-mum denominatoris a Log-mo numeratoris; residuum dat Log-mum quæsitum.

$$\begin{array}{rl} Log.\ 9. = & 0.9542425 \\ Log.\ 5. = & 0.6989700 \\ \hline Log.\ \frac{9}{5} = & 0.2552725 \end{array}$$

3. Si vero fractio data integris adhæreat, integra reducantur in unam fractionem, & eodem modo habebitur Log-mus, ut $3\frac{2}{7}$ fiant $\frac{23}{7}$ erit.

$$\begin{array}{rl} Log.\ 23 = & 1.3617278 \\ Log.\ 7 = & 0.8450980 \\ \hline Log.\ 3\frac{2}{7} = & 0.5166298 \end{array}$$

Similiter quæritur Log-mus numeri $354\frac{3}{4}$, reduc numerum datum ad fractionem, erit $\frac{1419}{4}$; & aufer Log-mum numeri 4 ex Log-mo numeri 1419, proveniet Log-mus quæsitus.

$$\begin{array}{rl} Log.\ 1419 = & 3.1519824 \\ Log.\ 4 = & 0.6020600 \\ \hline Log.\ \frac{1419}{4} = & 2.5499224 \end{array}$$

Ratio regulæ est, quia cum fractio sit quotus proveniens ex divisione numeratoris per denominatorem, Log-mus talis quoti est æqualis, *per Propos.* 3. *hujus*. differentiæ Log-morum divisoris, & dividendi, idest numeratoris, & denominatoris; ideoque ubi numerator minor est denominatore, ac proinde per eum dividi non potest, Log-mus major e minori subtrahendus est: quo in casu differentia evadit negativa, & præponitur Log-mis signum negativum —. Quod &c.

Log-mus integri cum fracto potest etiam haberi sic. Sit numerus datus $3560\frac{3}{4}$, sume differentiam Log-morum numeri 3560, & numeri 3561 proxime sequentis, cujus prioris numeri Log-mus est 3.5514500; secundi numeri est 3.5515720; differentia erit 1220. Dic jam per regulam proportionum, ut 4 ad 3, ita 1220 ad 915. Adde 915 Log-mo numeri 3560, nempe 3.5514500, habebis Log-mum integri cum fractione, sc. 3.5515415. Quod &c.

PROPOSITIO X.

Dato Log-mo, qui in tabulis accurate non existit, invenire numerum ei respondentem.

SI characteristica dati Log-mi sit 0, 1, vel 2, mutetur in 3, & quæratur inter 1000, & 10000 Log-us, qui sit proxime minor Log-mo dato, habebitur numerus quæsitus, tot fractiones decimales adjunctas habens, quot unitates characteristicæ accesserunt.

Sit datus Log-us 1.9201662, qui non reperitur exacte in tabulis, characteristica mutat 3, erit 3.9201662. Quære hunc inter 1000, & 10000, invenies numerum 8320 respondentem Log-mo 3.9201233, qui est proxime minor Log-mo dato, ut patet. Numerus ergo quæsitus erit 83 $\frac{20}{100}$, ob duas videlicet unitates, quibus aucta fuit characteristica.

Si Log-mus datus habeat characteristicam 3, & non reperiatur accurate in tabulis, ut Log-us 3.5163954, erit hæc regula.

1. Sume numerum 3283 respondentem Log-mo 3.5162709, qui est proxime minor Log-mo dato.

2. Subtrahe hunc Logarithmum a proxime sequenti 3.5164031, & fiet differentia prima 1322.

3. Idem Log-mus proxime minor Log-mo dato auferatur ab ipsomet Log-mo dato, erit secunda differentia 1245.

4. Fiat ut prima differentia 1322 ad secundam 1245, ita denominator futuræ fractionis ad libitum assumptus 100, 1000 &c. ad quartum proportionalem, qui erit numerator fractionis, nempe 94, erit ergo numerus quæsitus Log-mi dati 3283 $\frac{94}{100}$.

Demonstr. Eodem fere modo, quo *Prop.* 8. *hujus*. Nam differentia Log-morum prima est differentia unitatis, quæ ita se habet ad differentiam secundam, Log-mi scilicet dati, & proxime minoris, ut 100 ad quartum proportionalem 94. Sed nota, quod ideo inquiritur Log-mus datus inter 1000, & 10000, quia, ut diximus, ibi Log-morum differentiæ sunt minores, ac proinde, quæ capienda est pars proportionalis, ibi exactior habetur.

SCHOL. *Ubi tamen in minimis scrupulosi non sumus, ad praxim satis est sumere numerum respondentem Log-mo proxime minori, & fractiones ejusmodi negligere.*

PROPOSITIO XI.

Dato Log-mo defectivo, numerum ei respondentem invenire.

SIT datus Log-mus defectivus — 0.2218488, quæritur, quæ fractio ei respondeat.

1. Sume quemlibet denominatorem 100, vel 1000, vel 10000, e cujus Log-mo 2.0000000, vel 3.0000000, vel 4.0000000 subtrahe datum Log-mum defectivum.

2. Quære in tabulis numerum respondentem Log-mo residuo 2.7781512, qui dat 600 pro numeratore quæsitæ fractionis; habes ergo $\frac{600}{1000}$, seu $\frac{3}{5}$.

Log. num. 1000 = 3.0000000
Log. def. = − 0.2218488

Log. ref. = 2.7781512, *qui dat* 600.
Est ergo $\frac{600}{1000}$, *seu* $\frac{3}{5}$.

Similiter sit Log-mus defectivus − 0.3679767, quem subtrahe ex 4.0000000, residuum 3.6320233 in tabulis quæsitum dat 4825 pro numeratore fractionis. Habes ergo $\frac{4285}{10000}$.

Log. num. 10000 = 4.0000000
Log. def. = − 0.3679767

Log. resid. = 3.6320233, *qui dat* 4285 *proxime*
Est ergo $\frac{4285}{10000} = \frac{857}{2000}$.

Demonstr. ut *Propos.* 9.

PROPOSITIO XII.

Dato Log-mo excedenti Log-mum 4.0000000 *numerum ei congruum invenire.*

1. A Dato Log-mo auferatur Log-mus numeri 10, vel 100, vel 1000 &c. ut scilicet residuum sit proxime minus Log-mo 4.0000000, qui est tabularum maximus.

2. Quæratur ex tabulis numerus conveniens huic residuo.

3. Numerus inventus multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, per eum nempe numerum, cujus Log-mus ablatus fuit a Log-mo dato, factum est numerus quæsitus.

Sit inveniendus numerus dati Log-mi 7.8372413 ex hoc aufer Log-mum numeri 10000, hoc est 4.0000000, relinquetur Log-mus 3.8372413, cui ex tabulis respondet numerus 6874 cum fractione $\frac{5032}{10000}$, *per Propos.* 10. Hunc multiplica per 10000, fit numerus quæsitus 68745032.

Log. 7.8372413
Log. 4.0000000

Log. 3.8372413, *qui dat* 6874 $\frac{5032}{10000}$

Duc in 10000, *fit* 68745032.

Similiter sit datus Log-mus 8.2718416, ex quo aufer Log-mum 4.0000000; remanet 4.2718416, qui adhuc major est, quam 4.0000000. E residuo igitur Log-mo 4.2718416 rursus aufer 1.0000000, remanet 3.2718416, cui ex tabulis respondet numerus 1870, quem multiplica per 10000, & ulterius per 10, factum 187000000 erit numerus quæsitus.

Demonstr. Subducere Log-mum numeri 10, 100, 1000 &c. a Log-mo dato, est idem ac numerum quæsitum dividere per 10, vel 100, vel 1000 &c. erit ergo divisor 10, vel 100 &c. ad dividendum, quem voco Z, ut unitas ad quotum; ergo *per Prop.* 3. *hujus*, differentia Log-morum divisoris, & dividendi, (hoc est in secundo exemplo Log-mus 3.2718416) æquatur Log-mo quoti, cui ex tabulis respondet numerus 1870. Cum igitur sint proportionalia 100000 ad Z, ita 1 ad 1870; duo extrema ad invicem multiplicata æqualia sunt mediis

mediis per *Prop.* 16. *lib.*6. *Eucl.*, ideſt $Z = 187000000$. Quod erat &c.

SCHOL. *Cum reſiduum ex diviſione ſuperat dimidium diviſoris, additur quoto unitas. Sic in priori exemplo pro quoto* 5031, *ſumitur* 5032. *Nam diviſis* 3180000 *per* 632 *remanet* 408. *Quod pro hujuſmodi calculis nota. Quæ ſequuntur*, Trigonometriæ *doctrinam ſupponunt*.

PROPOSITIO XIII.

Dati cujuſcunque Sinus Log-mum invenire.

UT Log-mi Sinuum accuratiores inveniantur, ſupponitur Sinus conſtructos fuiſſe ad radium ſaltem 10000000000, & tribus deinde ultimis notis multatos, quales ſunt communiter in tabulis Ulacq, & aliorum. Sic Sinus ex. gr. grad. 5 ſupputatus ad Sinum totum 10000000000 eſt 871557427, qui in tabulis multatus reperitur tantum 871557. Cum autem Sinus quilibet conſiderari debeat tanquam numerus aliquis abſolutus, & vulgaris, Log-mi Sinuum quorumcunque habentur per *Prop.* 8. *hujus*. Sed ut facilior, & accuratior quoque ſit eorum inventio, neceſſe erit ad manum habere majorem Log-morum canonem, in quo numeri naturales ad plures, quam fieri poteſt, notas aſcendant.

Log-mi autem Sinuum reſpicere debent Sinus ipſos prout primo fuerunt inventi, nimirum tribus figuris longiores, quam in tabulis habeantur, reſpectu ſcilicet ad ſinum totum 10000000000. Sinus itaque ex gr. grad. 5 qui in tabulis Ulacq eſt 871557, habet pro ſuo Log-mo 8.9402960. Pariter grad. 61, 50 Sinus eſt 8815782, Log-mus vero 9.9452609. Ex characteriſtica enim, quæ ſemper unitate minor eſſe debet numero figurarum ipſius ſinus primo inventi, facile apparet, quot notas habuerit ſinus antequam multaretur.

Sit inveniendus Log-mus dati Sinus grad. 23, qui ſupputatus ad Sinum totum 10000000000 eſt 3907311284. Inveniatur ex tabulis majoribus Log-morum, numerus qui reſondeat quinque notis ad ſiniſtram, cujus Log-mus eſt 4.5918768. Deinde, ut docuimus in *Prop.* 8., inventa differentia Log-morum numeri 39073, & 39074 proxime ſequentis, quæ eſt 111; dic ut 100000 ad 111, ita notæ reſiduæ dati Sinus 11284 ad quartum proportionalem, nempe 12, qui ſi addatur Log-mo jam invento 4.5918768, prodit Log-us quæſitus, hoc eſt 9.5918780, mutata characteriſtica 4 in 9 ob decem figuras dati Sinus, atque ita reperiuntur reliqui Sinus.

COROLL. Logarithmus Sinus totius vulgo ponitur 10.0000000, ex quo ſi Log-mus aliquis auferatur, reſiduum dicitur *complementum Arithmeticum*, ut ſi ex ipſo Sinu toto 10.0000000 auferatur Log-mus Sinus grad. 23, nempe 9.5918780, reſiduum 0.4081220 dicitur complementum Arithmeticum ejuſdem Sinus.

PROPOSITIO XIV.

Invenire Log-mum Tangentium, & Secantium dati arcus.

TAngentium, & Secantium Log-mi inveniri poſſunt eodem modo, quo Log-mi Sinuum, ſed compendioſius habentur ſic: Su-

Sume Log-mum Sinus dati arcus, quem adde Log-mo Sinus totius. A ſumma aufer Log-mum complementi ejuſdem Sinus, qui habetur *per Prop. præc.*, reſiduus erit Log-mus Tangentis quæſitus. Inveniendus ſit Log-mus Tangentis grad. 23.

Adde Log. ſin. 23 =	9.5918780
Log. ſin. tot. =	10.0000000
Summa	19.5918780
Log. complem.	9.9640261
Tangen. Log.	9.6278519

Demonſtr. patet ex *Prob. 6.* Trigonometriæ Tacquet, in qua oſtenſum fuit, ita ſe habere Sinum complementi arcus dati ad Sinum ejuſdem arcus, ut Sinus totus ad Tangentem quæſitam: quæ ut inveniatur, additur ſecundus, & tertius terminus, & a ſumma ſubtrahitur primus *per Prop. 7. hujus*.

At pro inveniendis Secantibus dati arcus, dupla Log-mum Sinus totius, & ex duplo aufer Sinum complementi ejuſdem arcus, reſiduum dat Log-mum Secantis quæſitæ. Quæritur Log-mus Secantis pro arcu grad. 23.

Log. ſin. tot. =	10.0000000
	2
Ejus duplum =	20.0000000
Log. ſin. compl. =	9.9640261
Secan. Log. =	10.0359739

De-

Demonſtr. ex *Prob. 6. cit.* deducitur. Nam ſunt tres termini proportionales, Sinus complementi arcus dati grad. 23, Sinus totus, & Secans quæſita, ut ibi oſtenditur. Ut ergo habeatur tertius Arithmetice proportionalis, illis reſpondens, hoc eſt Log-mus Secantis, ex duplo ſecundi termini aufertur primus, *per Cor. 1. lemm. 2.*

COROLL. I. Si in Tab. non reperitur exacte Log-mus alicujus Sinus, Tangentis, vel Secantis, ſignum eſt, illum præter minuta prima, continere etiam ſecunda, quæ ſi quis indagare voluerit, operabitur eo modo, quo docuimus in *Prop. 10.* pro inveniendis fractionibus. Quod ſi ea diligentia opus non ſit, ſatis erit ſumere gradus cum minutis primis, quæ Log-o proxime minori reſpondent.

COROLL. II. In Tab. Ulacq. Log-mi Sinuum non habent Characteriſticam majorem, quam 9. Proinde ſi, calculo abſoluto, ex Log-morum additione reſultet Characteriſtica major 9, ex. gr. 10, 12, 25 &c. tunc figura prima a ſiniſtris abjicitur, fitque Characteriſtica 0, 2, 5 &c.

COROLL. III. Idem fit pro Log-morum Tangentibus, quæ gr. 45 minores ſunt. A gradibus vero 45 uſque ad 90 Log-morum Tangentes non habent Characteriſticam majorem 13. Idcirco ſi, poſt additionem factam, Characteriſtica duabus conſtet figuris, tunc vel ſecunda figura excedit 3, & in hoc caſu abjicitur prima, ſive ſit unitas, ſive binarius, ut in *A*; vel non excedit, & tunc retinetur unica unitas in figura prima, ut in *B* patet.

A	*B*
Tang. Log. 24.6040812	*Tang. Log.* 21.2162581
fit 4.6040812	*fit* 11.2162581

T SCHOL.

SCHOL. I. *Regula Trium etiam per solam Log-morum additionem potest absolvi, si sumatur prioris termini complementum Arithmeticum*, per Cor. Prop. 13, *& ad duos reliquos addatur. Dati sint tres numeri proportionales 4, 60, 25, quæritur quartus. Prioris numeri 4 complementum Arithmeticum est 9.3979400, addatur ad Log-os duorum numerorum 60 & 25, summa dabit Log-um quæsitum.*

Num. 4 *Compl. Arithm.*		9.3979400
Num. 60	*Log.*	1.7781512
Num. 25	*Log.*	1.3979400
	Summa	12.5740312
	Fit (per Cor. 2.)	2.5740312, *dat in Tab.* 375.

SCHOL. II. *Si Sinus totus sit primus, vel unus ex terminis regulæ Trium, potest omitti: nam in primo casu est* 0; *& in secundo addit unitatem mox delendam.*

SCHOL. III. *Log-mi Sinuum vocantur absolute Log-mi, sed Log-mi Tangentium peculiari nomine* Mesologarithmi, *& Log-mi Secantium* Tomologarithmi. *In tabulis inveniri non solent Tomolog-mi, vel quia facile ex Log-mis Sinuum erui possunt, ut vidimus, vel quia sine ipsis calculus bene potest institui. Similiter Sinus complementi alicujus arcus dicitur etiam Sinus secundus, & ab aliis* Cosinus. *Tangens, & Secans complementi dicuntur Tangens, & Secans secunda, vel* Cotangens, *&* Cosecans: *quæ nomina si ignorentur, auctores Trigonometrici difficile intelliguntur.*

SCHOL. IV. *Log-morum usus patet in omnem fere Mathesin. Nos pauca hic Problemata delibabimus. Plura videri possunt apud Ulacq, Cavalerium, & alios.*

PROBL.

PROBL. I.

Dati numeri quadratum, vel cubum per Log-mos invenire.

1. Datus sit numerus v. g. 18, cujus quadratum quæritur. Duplica numeri dati Log-mum, summa dabit Log-mum quadrati quæsiti.

Num. 18,	*Log.*	1.2552725
		1.2552725
	Summa	2.5105450, *dat in Tab. quadr.* 324

2. Pro inveniendo ejusdem numeri 18 cubo, sume ter, seu multiplica per 3 Log-mum ipsius numeri, productum dabit Log-mum cubi quæsiti.

Num. 18,	*Log.*	1.2552725
		3
		3.7658175, *dat in Tab. cubum* 5832

COROLL. Hinc apparet ratio, cur ad extrahendam ex quocunque dato numero radicem quadratam, vel cubicam, accipiatur ex Log-mo numeri dati dimidium pro radice quadrata, aut tertia pars pro radice cubica; cum quadratum ex Log-mo bis sumpto, cubus vero ex Log-mo ter sumpto prodeat. Item quarta, quinta &c. pars Log-mi dat Log-mum pro altioribus radicibus inveniendis.

 PROBL.

PROBL. II.

Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios proportionales.

1. INveniendus ſit medius proportionalis inter 20, & 320. Adde eorum Log-os, dimidiæ ſummæ Log-mus dat medium proportionalem quæſitum 80.

Num. 20, *Log.* 1.3010300
Num. 320, *Log.* 2.5051500
Summæ Log. 3.8061800
Dimidium Log. 1.9030900, *dat in Tab.* 80.
Eſt autem ∻ 20, 80, 320.

2. Inveniendi ſint inter duos numeros datos duo, vel tres, vel quatuor, aut plures medii proportionales, regula generalis eſt: aufer Log-mum numeri minoris ex Log-mo numeri majoris, & hujus reſidui tertiam partem, ſi duo medii quærantur; vel quartam, ſi tres; vel quintam, ſi quatuor, adde Log-mo numeri minoris, ſummæ Log-mus dabit in Tab. medium proportionalem, qui proxime conſequitur numerum datum minorem.

3. Ut habeantur medii proportionales reliqui, adde ſummæ præcedenti eandem tertiam, vel quartam, vel quintam Log-mi partem, ſumma dabit in Tab. reliquos medios proportionales quæſitos, ut exempla, quæ ſequuntur, rem ſatis illuſtrant. Signa + & — additionem, & ſubtractionem indicant. *Q* vero Log-mum quoti addendum.

2. In-

2. Inveniri oporteat duos medios proportionales inter numeros datos 15 & 120.

Num. 120, *Log.* 2.0791812
Num. 15, *Log.* — 1.1760913
Reſid. 0.9030899
Divid. per 3, *dat Q.* 0.3010299

Num. 15, *Log.* + 1.1760913
Summæ Log. 1.4771212, *dat in Tab.* 30.

Q. Log. + 0.3010299
Summæ Log. 1.7781511, *dat in Tab.* 60.
Sunt ergo ∻ 15, 30, 60, 120, *ut patet.*

3. Quæruntur inter numeros 20, & 1620 tres medii proportionales.

Num. 1620, *Log.* 3.2095150
Num. 20, *Log.* — 1.3010300
Reſid. 1.9084850
Divid. per 4, *dat Q.* 0.4771212
Adde num. 20 *Log.* + 1.3010300
Summæ Log. 1.7781512, *dat in Tab.* 60.

Q. Log. + 0.4771212
Summæ Log. 2.2552724, *dat in Tab.* 180.

Q. Log. + 0.4771212
Summæ Log. 2.7323936, *dat in Tab.* 540.
Sunt ergo in continua proportione ∻ 20, 60, 180, 540, 1620.

SCHOL.

SCHOL. *Hæc ſane pulcherrima Log-morum praxis ob ſui facilitatem, & brevitatem mihi tanti eſſe videtur, ut, propter hanc unam, Log-morum doctrinam addiſcendam eſſe putem. Unum aliquem ejus uſum ex innumeris, qui afferri poſſent, indicabimus in ſequenti* Propoſ. num. 5.

PROBL. III.

Quæſtiones aliquot Arithmeticæ per Log-mos expediuntur.

1. DAntur fœnori ſcuta 500, & ex ſingulis 100 lucrum eſt ſcutorum 5, quæritur quot annis ea ſors duplicabitur.

Ex Log-o numeri 100 ſubtrahe Log-mum numeri 5, Log-mus reſiduus in Tab. dat annos quæſitos.

Num. 100, *Log.* 2.0000000
Num. 5, *Log.* 0.6989700
Log. reſid. 1.3010300, *dat in Tab.* 20.

Quod quidem manifeſtum eſt: nam ſi ſcuta 100 anno 1 dant 5, ſcuta 500 annis 20 dant 500 per regulam proportionum compoſitam ex *Prop.* 2. *Cap.* 5. *Arithm.*

COROLL. Si tempus, quo ſors illa duplicatur, ut ſupra inventum, dividas per 2, per 4, vel 5 &c. habebis tempus, quo ſortis ejuſdem dimidium, ſeu quarta, vel quinta pars obtinetur. Sic dividendo annos 20 per 5, quotus 4 dat tempus, quod requiritur ad lucrum

crandam ejuſdem ſortis quartam partem ſcuta 125, ut patet.

2. Accepit Cajus aureos 500 cum uſura aureorum 10 ex ſingulis 100 in annum ea lege, ut niſi ſolvat ſingulis annis fiat ex fœnore auctio ſortis. Nihil fuit ſolutum toto triennio. Quæritur quantum debeat, ut propoſitum fuit in *Prop.* 13. *Arithm. n.* 5.

Cum hic 100 fiat 110, erit proportio ſortis ad ſortem una cum fœnore $\frac{110}{100}$, ſeu $\frac{11}{10}$. Auferatur numeri 10 Log-mus 1.0000000 ex numeri 11 Log-mo 1.0413927, reſiduum, ſeu Log-mus 0.0413927 erit ratio ſortis ad ſortem una cum fœnore unius anni. Sumatur ergo hujus reſidui Log-mus toties, quot ſunt anni (ut hic ter) eique addatur ſortis 500 Log-mus 2.6989700; ſummæ Log-mus 2.8231481 in Tab. quæſitus dabit pro ſorte, & uſura ejus triennii aureos 665 cum dimidio circiter ut in *Propoſ. cit.* fuit inventum.

Num. $\frac{11}{10}$ *Log.* 1.0413927
Log. 1.0000000
Reſid. Log. 0.0413927
Anni 3 3
Log. 0.1241781
Sortis 500 *Log.* 2.6989700
Summæ Log. 2.8231481, *dat* 665 $\frac{3265}{10000}$.

3. Pupilli alicujus bona, quæ æſtimata fuerunt ſcutorum 1600, accepit Hortenſius pacto augendi quotannis ſortem ex fructibus ad rationem ſcutorum 5 in ſingu-

ſingula centena. Retinuit illa annis 6, menſibus 5, & diebus 10, quæritur, quantum pupillo debeat.

Cum ſcuta 100 fiant 105, erit proportio ſortis ad ſortem una cum fœnore $\frac{105}{100}$, ſeu (dividendo per 5) $\frac{21}{20}$. Auferatur denominatoris 20 Log-mus 1.3010300 ex numeratoris 21 Log-mo 1.3222193, reſiduum 0.0211893 erit ratio ſortis ad ſortem una cum fœnore unius anni, qui Log-mus propter annos 6 ſumi debet ſexies, ſeu duci in 6, fitque 0.1271358.

Ut habeantur menſes, ac dies, dividatur Log-mus ille reſiduus 0.0211893 per 12, quotus 0.0017657 dat Log-mum, quinquies ſumendum pro 5 menſibus datis, nempe 0.0088285. Hic deinde diviſus per $30\frac{1}{2}$ dat Log-mum 0.000579, qui ſumendus eſt decies pro diebus 10, fitque 0.0005790. Addatur his Log-us 3.2041200 pro ſorte ſcutorum 1600, habetur ex horum ſumma Log-mus 3.3406633, qui in Tab. quæſitus dat numerum, ſeu ſcuta 2191 pupillo ipſi ab Hortenſio debita.

Pro annis 6	*Log.*	0.1271358	
Pro menſ. 5	*Log.*	0.0088285	
Pro diebus 10	*Log.*	0.0005790	
Pro ſorte 1600	*Log.*	3.2041200	
	Summa	3.3406633,	*dat* 2191.

4. Fingamus eundem Hortenſium debere alteri ſummam illam ſcut. 1600 ſolvendam poſt annos 6, menſes 5, dies 10: quam illi parata pecunia offert, ſiquidem ſcuta 5 ex ſingulis 100 a creditore ſibi relaxentur. Quæritur quantum debeat ſolvere.

Hæc quæſtio eadem ratione ſolvitur, dummodo ex Log-mo 3.2041200 ſortis 1600 auferatur ſumma Log-morum pro annis 6, menſibus 5, & diebus 10, ut ſupra inventa, nempe 0.1365433. Nam reſiduus Log-mus 3.0675767 in Tab. quæſitus dat ſummam ſolvendam ſcut. 1168.

Pro annis 6	*Log.*	0.1271358
Pro menſ. 5	*Log.*	0.0088285
Pro diebus 10	*Log.*	0.0005790
	Summa	0.1365433
Scut. 1600	*Log.*	− 3.2041200
	Reſid.	3.0675767, *dat in Tab.* 1168.

5. Scuta 1000, quæ fœnori data fuerant, reſtituuntur poſt annos ſex una cum annuis uſurarum uſuris, quæ ſimul cum ſorte conficiunt ſummam ſcut. 1340; quæritur ſingulorum annorum uſura cum ipſa ſorte, & quanta fuerit ex ſingulis 100 uſura.

Inveniantur inter duos numeros 1000, & 1340 tot medii proportionales minus uno, quot fuerunt anni (ut hic quinque) *per Probl.* 2. Dabunt illi ſummas quæſitas, hoc eſt ſortem una cum uniuſcunque anni uſura. En totius operationis typus.

Scuta 1340	*Log.*	3.1271048
Scuta 1000	*Log.*	− 3.0000000
	Reſid.	0.1271048
Divide per 6,	*dat Q.*	0.0211841

Log-mus sextæ partis, quem voco $\mathfrak{Q}$. addatur primum Log-mo sortis 1000, summa dabit Log-mum pro sorte, & usura primi anni *A*. Adde deinde huic summæ Log-mum ipsum $\mathfrak{Q}$, nova summa dabit Log-mum pro sorte, & usura secundi anni *B*; & sic deinceps addendo præcedenti summæ Log-mum eundem $\mathfrak{Q}$, aggregatum dat Log-um pro sorte, & lucro annorumm *C*, *D*, *E* &c.

	Log.	3.0000000		
$\mathfrak{Q}$.	*Log.* +	0.0211841		*A*
	Log.	3.0211841	*dat sc.*	1050
$\mathfrak{Q}$.	*Log.* +	0.0211841		*B*
	Log.	3.0423682	*dat sc.*	1102
$\mathfrak{Q}$.	*Log.* +	0.0211841		*C*
	Log.	3.0635523	*dat sc.*	1157
$\mathfrak{Q}$.	*Log.* +	0.0211841		*D*
	Log.	3.0847364	*dat sc.*	1215
$\mathfrak{Q}$.	*Log.* +	0.0211841		*E*
	Log.	3.1059205	*dat sc.*	1276
$\mathfrak{Q}$.	*Log.* +	0.0211841		*F*
	Log.	3.1271046	*dat sc.*	1340

Inventa autem usura primi anni *A* una cum sorte, scutis scilicet 1050, statim innotescit quanta fuerit ex singulis

lis

lis 100 usura. Nam si 1000 fiunt 1050, scuta 100 per regulam proportionum fiunt 105, adeoque usura fuit scut. 5 ex singulis 100, ut patet.

Ratio primæ partis deducitur *ex Coroll.* 13. *Cap.* 5. *Arithm.*, *& ex præc. Probl.*

PROBL. IV.

Data tormenti bellici elevatione, distantiam ictus invenire, & e converso.

1. EXperientia constat, maximum tormenti bellici ictum fieri ad elevationem anguli semirecti, seu gr. 45, reliquos vero ictus ab angulo semirecto æqualiter distantes, ut 30 & 60, 40 & 50 &c. æquales esse. Sit igitur experimento cognitum, ab eo tormento, dum ad gradus 45 elevaretur, explosum fuisse globum ad distantiam passuum 4000; quæritur, quanta futura sit distantia (eadem pyrii pulveris quantitate ac vi servata) ad datam elevationem gr. 30.

Cum angulus 45 duplicatus fiat 90, erit ut sinus totus ad sinum anguli 30 duplicati, seu 60, ita passus 4000 ad quartum proportionalem; adeoque per *Schol.*1. *&* 2. *Prop.* 14.

Gr. 60,	*Log.*	9.9375306
Pass. 4000,	*Log.*	3.6020600
Summa		13.5395906

Fit (*Cor.*2.*Prop.*14) 3.5395906, *dat pass.* 3464.

2. Quod

2. Quod si e converso data scopi distantia, ex. gr. passuum 1500, ad quem ictus est dirigendus, quæratur in ipsomet tormento elevationis angulus; fiat ut distantia maximi ictus, ex.gr. passus 4000, ad elevationem gr. 45, ita distantia data passuum 1500 ad angulum elevationis quæsitæ. Itaque duplicato angulo 45, ut in primo casu factum est, erit per *Schol.* 1. & 2. *Prop.* 14.

Pass. 4000 *Compl. Arithm.* 6.3979400
Pass. 1500 *Log.* 3.1760913
Summa 9.5740313, *dat gr.* 22.1.

SCHOL. *Quam singulari facilitate per Log-mos confici possint Tabulæ, quibus omnes tormenti bellici ictus ex uno dato determinari possint, quæque ad utranque hujus problematis partem maxime inserviant, facile est intelligere.*

PROBL. V.

Altitudinem Poli tempore æquinoctiorum invenire.

Statue in plano aliquo horizontali stylum, qui *Gnomon* dicitur, perpendicularem ad ipsum planum, qui divisus intelligatur in partes æquales 100. Tum in meridie ejus diei, in quo Sol Arietis, vel Libræ initium ingreditur (quod facile per Kalendaria innotescit) metire umbram, quam projicit stylus; sitque Romæ ex. gr. inventa umbræ longitudo partium 89, quarum stylus continet 100. Erit per *Probl.* 5. *Tacquet Trigonomet.*, ut longitudo umbræ 89 ad styli longitudinem 100, ita longitudo ipsius umbræ, prout est Sinus totus, ad longitudinem styli, prout est Tangens anguli altitudinis Solis, seu Aequatoris, quæ dat in Tab. gr. 48. 20, nempe *per Schol.* 1. & 2. *Prop.* 14.

Long. 89. *Compl. Arithm.* 8.0506100
Long. 100 *Log.* 2.0000000
Tangens 10.0506100, *dat gr.* 48.19.

Horum complementum ad gr. 90, nimirum gr. 41. 40, est altitudo Poli Urbis Romæ quæsita, ut ex doctrinæ Sphæricæ elementis patet. Quæ tamen per accuratiorem recentiorum calculum deinde inventa est gr. 41. 54, seu gr. 42 proxime. Proinde Aequatoris altitudo Romæ est gr. 48.

SCHOL. I. *Ceterum plures sunt modi, quibus nunc recentiores Mathematici quolibet die, vel etiam nocte per stellas, elevationem Poli inveniunt, cum hoc problema ad Geographiæ doctrinam sit maxime necessarium, & Astronomiæ universæ sit veluti basis, ac fundamentum.*

SCHOL. II. *Ut habeantur altitudines meridianæ signorum Zodiaci Borealium, adduntur ad altitudinem Aequatoris tuæ regionis declinationes Solis, quæ in Tab. Astronomicis passim occurrunt. Sic declinatio Solis in principio signorum Borealium* ♉ & ♍ *est gr.* 11. 30. *Hos adde ad Aequatoris altitudinem, quæ Romæ, ut dictum est gr.* 48, *erit altitudo meridiana Solis* ♉ & ♍ *initium ingressi gr.* 59. 30. *Quod si altitudinem meridianam Solis quæras pro initio signorum Australium* ♎ & ♒, *subtrahe ab Aequatoris altitudine, nempe ex. gr.* 48, *eorum*

eorum declinationem, quæ est gr. 20. 12, *residuam dat gr.* 27. 48 *pro altitudine meridiana quæsita.*

PROBL. VI.

In linea meridiana Zodiaci signa describere.

Ducta in aliquo plano horizontali linea meridiana, prout in elementis Sphæricis docetur, quam singulis diebus Sol per foramen exiguum transiens, in ipso meridiei momento tangat, describenda sint in illa Zodiaci signa, nempe ♈, ♉, ♊ &c. Aries, Taurus, Gemini &c. ad dignoscendum tempus, quo Sol ea signa ingreditur, atque percurrit.

Metire altitudinem gnomonis, seu muri usque ad foramen illud, per quod Sol transit, ut nota fiat in pedibus, vel unciis, aut alia qualibet mensura. Tum inventis altitudinibus meridianis signorum Cœlestium, *per Schol.* 2. *Probl.* 5, habebis earum complementa, & complementorum ipsorum Mesolog-mos, seu Tangentes. Fiat igitur ut muri altitudo, prout est Sinus totus, ad Tangentem complementi altitudinis meridianæ talis signi, seu paralleli, ita eadem altitudo in pedibus, vel unciis nota ad quartum proportionale, quod dabit in Tabulis pedes, vel uncias, quibus distabit ab initio lineæ meridianæ signi cœlestis locus in ipsamet linea meridiana designandus.

Sit exemplum Gnomon celeberrimus Romæ in Thermis Diocletiani jussu Clem. XI. Pont. Max. a Cl. Viro Francisco Blanchino ejusdem Pontificis Prælato domestico

stico constructus anno 1702; in quo quidem altitudo muri usque ad foramen, per quod transit radius Solaris, est unciarum 750 pedis regii Parisiensis, linea vero meridiana in ænea lamina pavimento inserta est. Fingamus huic Zodiaci signa ♐ & ♒ (nam bina simul describuntur) esse a nobis inscribenda, seu quærendum esse punctum, quod Sol tangit, ubi signa illa Zodiaci ingreditur. Altitudo meridiana eorundem signorum est gr. 27. 48, *per Schol.* 2. *Probl.* 5., eorumque complementum gr. 61. 12. Hujus autem complementi Tangens ex Tab. 10.2598311. Fiat ergo ut altitudo muri, prout est Sinus totus, ad altitudinis meridianæ complementi Tangentem 10.2598311, ita eadem muri altitudo, prout est unciarum 750 Log-mus ad Log-mum pro unciis quæsitis. Erit *per Schol.* 1. & 2. *Prop.* 14.

Complem. Tang.	10.2598311
Unc. 750 *Log.*	2.8750613
Summa	13.1348924

Fit (*Cor.* 2. *Prop.* 14.) 3.1348924, *dat unc.* 1364.

Distabunt igitur signa ♐ & ♒ a principio lineæ meridianæ unciis 1364 pedis ejusdem Parisiensis. Eademque ratione ceterorum Zodiaci signorum in ipsa linea meridiana locus designabitur.

FINIS.